

◇ 研究报告 ◇

基于层状模型的功能梯度板中兰姆波传播研究*

吴荣兴^{1,2†} 于兰珍^{1,2} 李晓东¹ 邱耀¹

(1 宁波职业技术学院建工学院 宁波 315800)

(2 宁波大学机械与力学学院 宁波 315211)

摘要 功能梯度板中的兰姆波的传播在实际工程中有着非常广泛的应用。采用层状模型研究了兰姆波在材料特性沿厚度方向连续变化的功能梯度板中的传播特性。通过数值计算获得了层状板中兰姆波的色散关系,并与已有结果进行了比较,获得了材料属性沿厚度方向呈指数变化和多项式变化时功能梯度板中兰姆波的波速和位移解。当材料属性连续变化时,兰姆波各阶模态的波速与位移都将发生变化。相比于兰姆波的高阶模态,低阶模态的波速变化更加明显。本文的研究可为功能梯度板的设计提供参考。

关键词 兰姆波,功能梯度材料,波速,位移,层状结构

中图分类号: O317 文献标识码: A 文章编号: 1000-310X(2016)03-0199-07

DOI: 10.11684/j.issn.1000-310X.2016.03.003

Propagation of Lamb wave in a functionally graded plate with a layered model

WU Rongxing^{1,2} YU Lanzhen^{1,2} LI Xiaodong¹ QIU Yao¹

(1 Department of Architectural Engineering, Ningbo Polytechnic, Ningbo 315800, China)

(2 School of Mechanical Engineering and Mechanics, Ningbo University, Ningbo 315211, China)

Abstract The propagation of Lamb waves in functionally graded plates has been widely used in engineering. The Lamb wave propagation in a functionally graded plate with material property continuously varying along the thickness direction has been analyzed by a layered model. The dispersion relationship of Lamb wave of layered plate has been obtained by using the numerical calculation and compared with the known results. The wave velocity and displacements of Lamb wave also have been obtained with exponential and polynomial property grading schemes. With continuous variation of material property, the wave velocity and displacements of Lamb wave changed. Compared with the high order mode of Lamb wave, the change of wave velocity of the low order is more significant. This study can be used for designing of the functionally graded plate.

Key words Lamb wave, Functionally graded material, Wave velocity, Displacement, Layered structure

2015-07-16 收稿; 2015-10-21 定稿

*国家自然科学基金项目(10932004), 浙江省教育厅 2015 高校访问工程师校企合作项目(考虑复杂因素的石英晶体谐振高频振动研究), 宁波职业技术学院青年博士创新项目和科研项目(2013001, NZ14001)

作者简介: 吴荣兴(1982-), 男, 浙江东阳人, 博士, 讲师, 研究方向: 压电声波理论和数值分析。

†通讯作者 E-mail: wurongxing98@163.com

1 引言

功能梯度材料是指材料特性沿空间一个或是多个方向持续变化的新型复合材料,其应用领域从早期的航空航天扩展到生物医学工程、电子通讯和机械工程等多个领域^[1]。在这些广泛应用中经常需要分析弹性波在功能梯度结构中的传播特性,这些研究工作对于微机电系统和声波器件的微型化具有重要意义^[2]。Liu等^[3]利用二次分层模型对功能梯度板中剪切波的传播进行了研究。Gao等分别利用多层模型^[4]、Frobenius方法^[5]和同伦分析方法^[6]研究了功能梯度板中声表面波的传播。Du^[7]等采用渐进方法分析了功能梯度层状结构中乐甫波的传播问题。与此同时,多层板和功能梯度板中兰姆波的传播分析也引起了研究人员的关注。Zhu^[8-9]等研究在不同负载层情况下弹性薄板中兰姆波的传播。朱金颖^[10]等研究了夹层板中兰姆波的频散特性。在这些分析过程中,除了极少数情况下,一般无法获得其精确解析解^[11]。如果能够解决多层结构计算上的困难,就可以用多层结构模型来分析材料属性沿厚度方向任意形式变化的情况^[12-13]。基于这一思想,本文对材料属性沿厚度方向按给定形式变化的层状结构中传播的兰姆波进行了分析。计算结果表明随着材料特性的连续变化,各阶兰姆波波速和位移都将发生显著变化。本文的研究方法和结果可为功能梯度板的设计提供指导^[11]。

2 单层平板中的兰姆波

首先分析兰姆波在无限大各向同性单层板中的传播,此时认为单层板中材料属性和密度沿着厚度方向是不变的。对于单层板中沿 x_1 方向传播的兰姆波,满足亥姆赫兹方程的声波势函数的形式解可以表示为^[8,14]

$$\begin{aligned}\varphi &= [A \cosh(qx_2) + B \sinh(qx_2)] e^{i(\omega t - kx_1)}, \\ \psi &= [C \sinh(sx_2) + D \cosh(sx_2)] e^{i(\omega t - kx_1)},\end{aligned}\quad (1)$$

式(1)中 $\varphi(\psi)$, $A(B, C, D)$, $\omega, k, x_1(x_2)$ 和 t 分别为单层板中纵波和横波的势函数,振幅,角频率,波数,坐标和时间变量。这里 q 和 s 分别为

$$\begin{aligned}q &= \sqrt{k^2 - k_L^2}, \\ s &= \sqrt{k^2 - k_T^2},\end{aligned}\quad (2)$$

式(2)中 k_L 和 k_T 分别为单层板中纵波和横波的波数,具体定义如下

$$\begin{aligned}k_L &= \omega/c_L, \\ k_T &= \omega/c_T,\end{aligned}\quad (3)$$

式(3)中 c_L 和 c_T 分别为单层板的纵波和横波波速,具体表达式为

$$\begin{aligned}c_L^2 &= (\lambda + 2\mu)/\rho, \\ c_T^2 &= \mu/\rho,\end{aligned}\quad (4)$$

式(4)中 λ, μ 和 ρ 分别为单层板材料的拉梅常数和密度。

单层板中各点沿 x_1 和 x_2 方向的位移为^[8,14]

$$\begin{aligned}u_1 &= \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \\ u_2 &= \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \frac{\partial \psi}{\partial x_1}.\end{aligned}\quad (5)$$

利用本构关系,可以得到单层板中的应力表达式如下^[8,14]

$$\begin{aligned}T_2 &= \frac{\lambda \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} \right) + 2\mu \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1 \partial x_2} \right)}{i\omega}, \\ T_6 &= \frac{\mu \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} \right)}{i\omega}.\end{aligned}\quad (6)$$

将声波势函数的形式解式(1)代入位移式(5)和应力式(6)并略去 $e^{i(\omega t - kx_1)}$,可以得到

$$\begin{aligned}u_1 &= -ikA \cosh(qx_2) - ikB \sinh(qx_2) \\ &\quad - sC \cosh(sx_2) - sD \sinh(sx_2), \\ u_2 &= qA \sinh(qx_2) + qB \cosh(qx_2) \\ &\quad - ikC \sinh(sx_2) - ikD \cosh(sx_2),\end{aligned}\quad (7)$$

和

$$\begin{aligned}T_2 &= (-\lambda k^2 + \lambda q^2 + 2\mu q^2) \\ &\quad \times [A \cosh(qx_2) + B \sinh(qx_2)] \\ &\quad - 2\mu i k s [C \cosh(sx_2) + D \sinh(sx_2)], \\ T_6 &= -2i\mu k q [A \sinh(qx_2) + B \cosh(qx_2)] \\ &\quad - \mu (k^2 + s^2) \\ &\quad \times [C \sinh(sx_2) + D \cosh(sx_2)],\end{aligned}\quad (8)$$

式(8)中应力表达式进一步略去了 $1/i\omega$ 。

对于单层板,只要满足上下两个端面自由边界条件即可。将应力式(8)代入边界条件就可以得到关于振幅 A, B, C, D 的4个线性方程组,如果这些

振幅存在非零解,那么必然要求其系数矩阵的行列式值为零^[8-9]。这样就建立了兰姆波在单层板中传播的色散方程。

3 功能梯度板中的兰姆波

当兰姆波在如图1所示的层状结构中传播时,认为该层状结构有 N 个各向同性层,并且每层的材料属性是不变的。这时第 n 层材料的拉梅常数和材料密度分别为 $\lambda^{(n)}, \mu^{(n)}$ 和 $\rho^{(n)}$,基于单层板中兰姆波的传播特性,可以写出第 n 层中兰姆波的位移和应力分别为

$$\begin{aligned} u_1^{(n)} &= -ikA^{(n)} \cosh [q^{(n)}x_2] \\ &\quad - ikB^{(n)} \sinh [q^{(n)}x_2] \\ &\quad - s^{(n)}C^{(n)} \cosh [s^{(n)}x_2] \\ &\quad - s^{(n)}D^{(n)} \sinh [s^{(n)}x_2], \\ u_2^{(n)} &= q^{(n)}A^{(n)} \sinh [q^{(n)}x_2] \\ &\quad + q^{(n)}B^{(n)} \cosh [q^{(n)}x_2] \\ &\quad - ikC^{(n)} \sinh [s^{(n)}x_2] \\ &\quad - ikD^{(n)} \cosh [s^{(n)}x_2], \end{aligned} \quad (9)$$

和

$$\begin{aligned} T_2^{(n)} &= [-\lambda^{(n)}k^2 + \lambda^{(n)}q^{(n)2} + 2\mu^{(n)}q^{(n)2}] \\ &\quad \times A^{(n)} \cosh [q^{(n)}x_2] \\ &\quad + [-\lambda^{(n)}k^2 + \lambda^{(n)}q^{(n)2} + 2\mu^{(n)}q^{(n)2}] \\ &\quad \times B^{(n)} \sinh [q^{(n)}x_2] \\ &\quad - 2\mu^{(n)}iks^{(n)}\{C^{(n)} \cosh [s^{(n)}x_2] \\ &\quad + D^{(n)} \sinh [s^{(n)}x_2]\}, \\ T_6^{(n)} &= -2i\mu^{(n)}kq^{(n)}\{A^{(n)} \sinh [q^{(n)}x_2] \\ &\quad + B^{(n)} \cosh [q^{(n)}x_2]\} - \mu^{(n)}[k^2 + s^{(n)2}] \\ &\quad \times \{C^{(n)} \sinh [s^{(n)}x_2] \\ &\quad + D^{(n)} \cosh [s^{(n)}x_2]\}. \end{aligned} \quad (10)$$

在如图1所示的层状结构的功能梯度板,首先是满足上下自由表面的应力边界条件如下

$$T_{2U}^{(1)} = T_{6U}^{(1)} = T_{2L}^{(N)} = T_{6L}^{(N)} = 0, \quad (11)$$

式(11)中 N 为多层板的总层数,下标 U 和 L 分别表示上下表面。同样各层之间也应该满足位移和应力的连续性条件如下

$$\begin{aligned} T_{2L}^{(n)} &= T_{2U}^{(n+1)}, \quad T_{6L}^{(n)} = T_{6U}^{(n+1)}, \\ u_{1L}^{(n)} &= u_{1U}^{(n+1)}, \quad u_{2L}^{(n)} = u_{2U}^{(n+1)}. \end{aligned} \quad (12)$$

将各层的位移式(9)和应力式(10)分别代入到边界条件式(11)和连续性条件式(12),可以获得兰姆波在层状结构的功能梯度板中传播的振动方程如下

$$MA = 0, \quad (13)$$

式(13)中振幅向量为

$$A = \{A^{(1)}, B^{(1)}, C^{(1)}, D^{(1)}, \dots, A^{(n)}, B^{(n)}, C^{(n)}, D^{(n)}, \dots, A^{(N)}, B^{(N)}, C^{(N)}, D^{(N)}\}. \quad (14)$$

系数矩阵 M 中非零元素见附录A。至此,兰姆波在层状结构的功能梯度板中的传播可以用方程(13)来分析。通过令矩阵(14)的行列式值为零就可以建立兰姆波的波速方程,接着再利用求出的波速和振幅比来绘制兰姆波的位移^[15]。当材料属性沿着厚度方向连续变化时,就可以求出该变化形式对兰姆波波速和位移的影响。最后在工程应用中,可以选择适当的材料属性变化形式来满足特定的波速和位移。

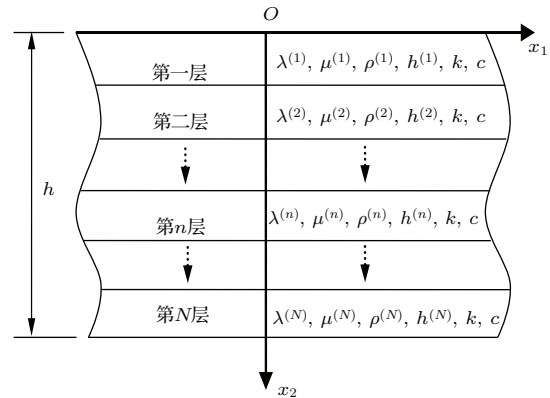


图1 层状结构的功能梯度板

Fig. 1 A layered functionally graded plate

4 数值计算

首先将厚度为10 mm的铝板等厚度分为12层并且认为各层的材料属性完全一致,可以获得兰姆波在此多层板中传播的色散关系如图2所示。

图2表明随着频率的升高,多层板中兰姆波将逐渐出现各阶模态。例如当频率厚度积为3000 Hz·m时,我们得到的相速度为4.05329763, 4.22366379, 6.65940192 和 7.70932970 km/s,与以前单层板的理论和数值结果完全一致^[8-9]。这样就验证了我们多层板推导的正确性和可行性。在此基

基础上,我们先分析材料属性沿着厚度方程呈指数形式变化的情形,也就是

$$(\lambda, \mu, \rho) = (\lambda_0, \mu_0, \rho_0) e^{(\alpha x_2)}, \quad (15)$$

式(15)中 α 为材料属性的梯度变化参数,第 n 层的材料属性以该层下表面的参数来确定,在该层中其材料参数是不变的。我们获得的材料属性梯度变化参数 α 对波速的影响如图3所示,这里的频率厚度积为 $3000 \text{ Hz} \cdot \text{m}$ 。

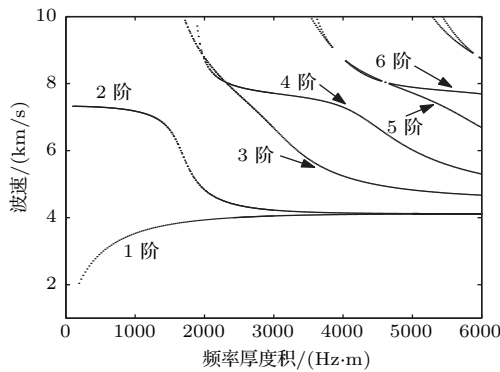


图2 多层板中兰姆波的色散曲线

Fig. 2 The dispersion relationship for Lamb wave of layered plate

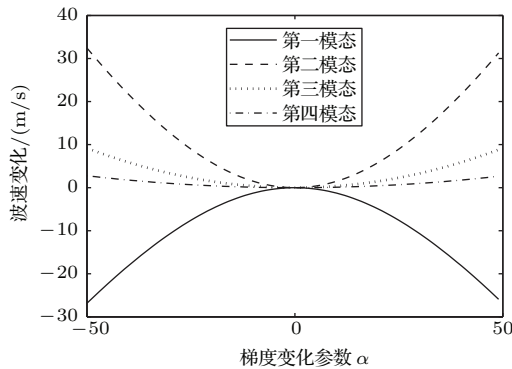


图3 材料属性指数变化的功能梯度板中兰姆波波速变化与材料梯度变化参数 α 的关系

Fig. 3 Lamb wave velocity variation versus the material grading index α in an exponentially graded plate

这里需要指出的是图3的纵坐标是兰姆波的波速变化。图3表明当材料梯度改变时,功能梯度板中各阶兰姆波波速都将发生改变,并且低阶兰姆波的波速变化比高阶波更加明显。

可以进一步分析出梯度变化参数对兰姆波位移的影响。基于方程(13)和系数矩阵行列式值为零,重写出位移表达式如下

$$u_1^{(n)} = -ik\beta_1^{(n)} \cosh [q^{(n)}x_2]$$

$$\begin{aligned} & -ik\beta_2^{(n)} \sinh [q^{(n)}x_2] \\ & -s^{(n)}\beta_3^{(n)} \cosh [s^{(n)}x_2] \\ & -s^{(n)}\beta_4^{(n)} \sinh [s^{(n)}x_2], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_2^{(n)} = & q^{(n)}\beta_1^{(n)} \sinh [q^{(n)}x_2] \\ & + q^{(n)}\beta_2^{(n)} \cosh [q^{(n)}x_2] \\ & - ik\beta_3^{(n)} \sinh [s^{(n)}x_2] \\ & - ik\beta_4^{(n)} \cosh [s^{(n)}x_2], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_1^{(n)} = \frac{A^{(n)}}{D^{(n)}}, \quad \beta_2^{(n)} = \frac{B^{(n)}}{D^{(n)}}, \\ \beta_3^{(n)} = \frac{C^{(n)}}{D^{(n)}}, \quad \beta_4^{(n)} = \frac{D^{(n)}}{D^{(n)}}. \end{aligned} \quad (16)$$

这样可以绘制出兰姆波各阶位移如图4-7所示,在新位移表达式(16)中引入了振幅比,因此就图4-7纵坐标不存在单位^[11,15]。

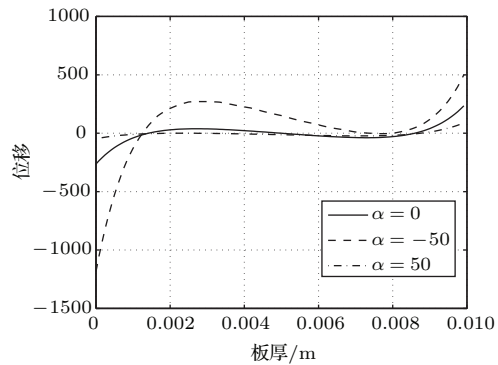


图4 不同梯度参数下的兰姆波第一阶模式对应的 u_1 位移

Fig. 4 Displacements u_1 of the first mode of Lamb wave with different material property grading indices

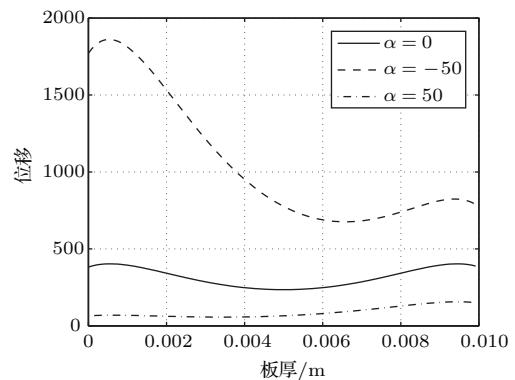


图5 不同梯度参数下的兰姆波第一阶模式对应的 u_2 位移

Fig. 5 Displacements u_2 of the first mode of Lamb wave with different material property grading indices

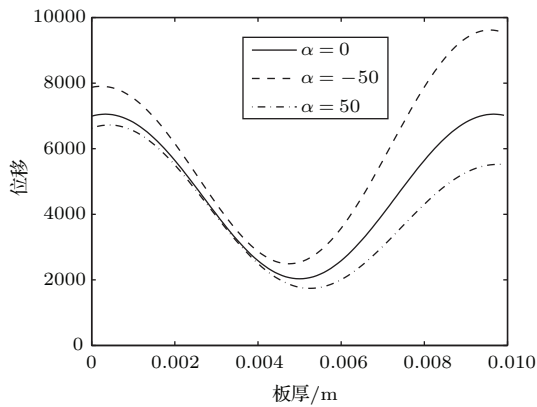


图6 不同梯度参数下的兰姆波第四阶模态对应的 u_1 位移

Fig. 6 Displacements u_1 of the fourth mode of Lamb wave with different material property grading indices

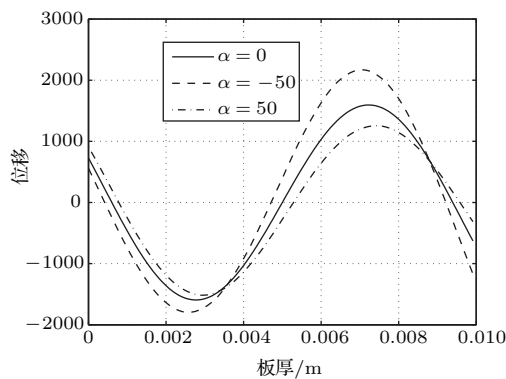


图7 不同梯度参数下的兰姆波第四阶模态对应的 u_2 位移

Fig. 7 Displacements u_2 of the fourth mode of Lamb wave with different material property grading indices

以前的研究表明薄板中兰姆波存在对称和反对称模态，这里获得的位移同样也表现出相应的对称和反对称模态^[14]。图4-7中材料属性的梯度变化参数 α 的取值与先前参考文献的一致^[4-6,14]。图4-5表明，当材料从上表面到下表面逐渐变硬时，第一模态对应的上表面位移将会增大，而下表面位移影响较小。同样情况下，第四模态对应的上下表面位移变化都较大。这说明功能梯度板中材料属性变化形式的不同对兰姆波各阶模态的位移影响效果也不一样。而这些结果可以在材料变形形式选择上起到指导作用。例如在压电声波器件表面，变形的增加将会产生更多的电荷，同样变形的减少将可以直接应用于振动控制和工程隔振^[11,16]。

最后，我们可以将材料属性沿厚度方向变化推

广到以下形式

$$(\lambda, \mu, \rho) = (\lambda_0, \mu_0, \rho_0) (1 + \alpha x_2^m), \quad (17)$$

式(17)中 α 仍为材料属性的梯度变化参数，这种变化形式可以表征大部分的功能梯度板材料属性的变化趋势。对于 $m = 1$ ，即线性变化情况，图8给出了层状结构的功能梯度板中兰姆波的波速变化与材料参数 α 的关系。图8表明当材料属性沿着厚度方向线性变化时，波速也将随之改变，并且当材料参数 α 较大时，这种调节效果将更加明显。对于非线性情况，本文给出了 $m = 2$ 时层状结构的功能梯度板中兰姆波的波速变化与材料参数 α 的关系如图9所示。由于文中所取的板厚较小，那么在非线性情况下式(17)中的材料属性几乎没有变化，因此图9中各阶兰姆波波速变化十分微小。

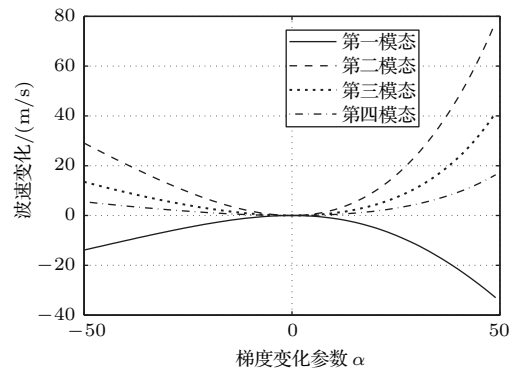


图8 材料属性线性变化的功能梯度板中兰姆波波速变化与材料梯度变化参数 α 的关系 ($m = 1$)

Fig. 8 Lamb wave velocity variation versus the material grading index α in an linear functionally graded plate ($m = 1$)

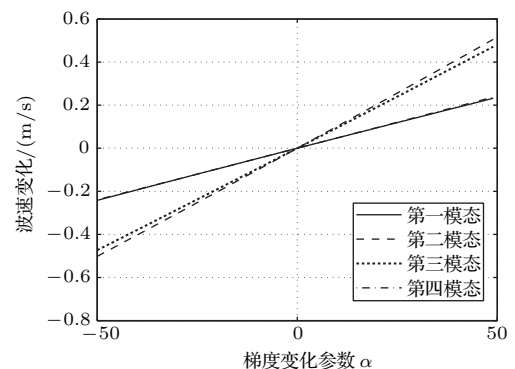


图9 材料属性非线性变化的功能梯度板中兰姆波波速变化与材料梯度变化参数 α 的关系 ($m = 2$)

Fig. 9 Lamb wave velocity variation versus the material grading index α in an nonlinear functionally graded plate ($m = 2$)

5 结论

利用层状模型并结合边界条件和连续性条件,建立了兰姆波在功能梯度板中传播的波动方程,相应的波速和位移可以从波动方程中直接求出,与已有的研究结果进行比较后发现两种波速的计算结果完全一致。获得的色散关系表明功能梯度板中存在多个兰姆波波速,不同材料属性的变化形式对板中各种模态的波速和位移有着不同的影响。在材料属性呈指数变化和线性变化时,高阶模态的波速变化比低阶模态小20–40 m/s。在材料属性呈非线性变化时,各阶模态的波速变化不大,相比于高阶模态,前两阶模态的波速变化仍然比较明显。为了实现功能梯度材料的有效应用,可通过选取适当的材料属性变化形式以及相应的振动模态来达到合适的振动效果。

参 考 文 献

- [1] 李智慧, 何小凤, 李运刚. 功能梯度材料的研究现状[J]. 河北理工学院学报, 2007, 2(1): 45–50.
LI Zhihui, HE Xiaofeng, LI Yungang. Current status of the research on functionally gradient materials[J]. Journal of Hebei Institute of Technology, 2007, 2(1): 45–50.
- [2] LEFEBVRE J E, ZHANG V, GAZALET J, et al. Acoustic wave propagation in continuous functionally graded plates: an extension of the Legendre polynomial approach[J]. IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control, 2001, 85(5): 855–858.
- [3] LIU G R, LAM K Y, SHANG H M. A new method for analyzing wave fields in laminated composite plates: two-dimensional cases[J]. Composites Engineering, 1995, 5(12): 1489–1498.
- [4] GAO L M, WANG J, ZHONG Z, et al. An analysis of surface acoustic wave propagation in a plate of functionally graded materials with a layered model[J]. Science in China Series G: Physics, Mechanics and Astronomy, 2008, 51(2): 165–175.
- [5] GAO L M, WANG J, ZHONG Z, et al. An exact analysis of surface acoustic waves in a plate of functionally graded materials[J]. IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control, 2009, 56(12): 2693–2700.
- [6] GAO L M, WANG J, ZHONG Z, et al. An analysis of surface acoustic wave propagation in functionally graded plates with homotopy analysis method[J]. Acta Mechanica, 2009, 208(3–4): 249–258.
- [7] DU J K, JIN X Y, WANG J, et al. Love wave propagation in functionally graded piezoelectric material layer[J]. Ultrasonics, 2007, 46(1): 13–22.
- [8] ZHU Z M, WU J R. The propagation of Lamb waves in a plate boarded with a viscous liquid[J]. Journal of the Acoustical Society of America, 1995, 98(2): 1507–1064.
- [9] ZHU Z M, WU J R, LI J, et al. A general dispersion relation for Lamb wave sensors with liquid-layer loading[J]. Sensors and Actuators, 1995, 49(s1–2): 79–84.
- [10] 朱金颖, 陈龙珠, 吴世明. 层状板中Lamb波的频散特性研究[J]. 振动工程学报, 1998, 11(3): 366–372.
ZHU Jinying, CHEN Longzhu, WU Shiming. Dispersion of Lamb waves in layered plate[J]. Journal of Vibration Engineering, 1998, 11(3): 366–372.
- [11] 高立名. 功能梯度材料板中声表面波传播的分析[D]. 上海: 同济大学, 2007.
- [12] WANG J, LIN J B, LI Z. Two-dimensional analysis of the effect of an electrode layer on surface acoustic waves in a finite anisotropic plate[J]. Ultrasonics, 2006, 44(S1): e935–e939.
- [13] WANG J, DU J K, LU W Q, et al. Exact and approximate analysis for surface waves in infinite elastic plate with a thin metal layer[J]. Ultrasonics, 2006, 44(S1): e941–e945.
- [14] AULD B A. Acoustic fields and wave in solids[M]. Malabar, Florida: Krieger Publishing Company, 1995.
- [15] WU R X, WANG J, DU J K, et al. The nonlinear thickness-shear vibrations of quartz crystal plates under an electric field[J]. International Journal of Non-Linear Mechanics, 2014, 61(5): 32–38.
- [16] YANG J S. Analysis of piezoelectric devices[M]. Singapore: World Scientific Publishing, 2006.

附录A 系数矩阵 \mathbf{M} 中非零元素如下

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}(1, 1) &= [-\lambda^{(1)}k^2 + \lambda^{(1)}q^{(1)2} + 2\mu^{(1)}q^{(1)2}] \cosh [q^{(1)} \cdot 0], \\
 \mathbf{M}(1, 2) &= [-\lambda^{(1)}k^2 + \lambda^{(1)}q^{(1)2} + 2\mu^{(1)}q^{(1)2}] \sinh [q^{(1)} \cdot 0], \\
 \mathbf{M}(1, 3) &= -2\mu^{(1)}iks^{(1)} \cosh [s^{(1)} \cdot 0], \quad \mathbf{M}(1, 4) = -2\mu^{(1)}iks^{(1)} \sinh [s^{(1)} \cdot 0], \\
 \mathbf{M}(2, 1) &= -2\mu^{(1)}ikq^{(1)} \sinh [q^{(1)} \cdot 0], \quad \mathbf{M}(2, 2) = -2\mu^{(1)}ikq^{(1)} \cosh [q^{(1)} \cdot 0], \\
 \mathbf{M}(2, 3) &= -\mu^{(1)}[k^2 + s^{(1)2}] \sinh [s^{(1)} \cdot 0], \quad \mathbf{M}(2, 4) = -\mu^{(1)}[k^2 + s^{(1)2}] \cosh [s^{(1)} \cdot 0], \\
 \mathbf{M}(4n-5, 4n-7) &= [-\lambda^{(n-1)}k^2 + \lambda^{(n-1)}q^{(n-1)2} + 2\mu^{(n-1)}q^{(n-1)2}] \cosh [-q^{(n-1)} \cdot h(n-1)], \\
 \mathbf{M}(4n-5, 4n-6) &= [-\lambda^{(n-1)}k^2 + \lambda^{(n-1)}q^{(n-1)2} + 2\mu^{(n-1)}q^{(n-1)2}] \sinh [-q^{(n-1)} \cdot h(n-1)], \\
 \mathbf{M}(4n-5, 4n-5) &= -2\mu^{(n-1)}iks^{(n-1)} \cosh [-s^{(n-1)} \cdot h(n-1)],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M(4n-5, 4n-4) &= -2\mu^{(n-1)}iks^{(n-1)} \sinh[-s^{(n-1)} \cdot h(n-1)], \\
M(4n-5, 4n-3) &= [-\lambda^{(n)}k^2 + \lambda^{(n)}q^{(n)2} + 2\mu^{(n)}q^{(n)2}] \cosh[-q^{(n)} \cdot h(n-1)], \\
M(4n-5, 4n-2) &= [-\lambda^{(n)}k^2 + \lambda^{(n)}q^{(n)2} + 2\mu^{(n)}q^{(n)2}] \sinh[-q^{(n)} \cdot h(n-1)], \\
M(4n-5, 4n-1) &= -2\mu^{(n)}iks^{(n)} \cosh[-s^{(n)} \cdot h(n-1)], \\
M(4n-5, 4n-0) &= -2\mu^{(n)}iks^{(n)} \sinh[-s^{(n)} \cdot h(n-1)], \\
M(4n-4, 4n-7) &= -2\mu^{(n-1)}ikq^{(n-1)} \sinh[-q^{(n-1)} \cdot h(n-1)], \\
M(4n-4, 4n-6) &= -2\mu^{(n-1)}ikq^{(n-1)} \cosh[-q^{(n-1)} \cdot h(n-1)], \\
M(4n-4, 4n-5) &= -\mu^{(n-1)}[k^2 + s^{(n-1)2}] \sinh[-s^{(n-1)} \cdot h(n-1)], \\
M(4n-4, 4n-4) &= -\mu^{(n-1)}[k^2 + s^{(n-1)2}] \cosh[-s^{(n-1)} \cdot h(n-1)], \\
M(4n-4, 4n-3) &= -2\mu^{(n)}ikq^{(n)} \sinh[-q^{(n)} \cdot h(n-1)], \\
M(4n-4, 4n-2) &= -2\mu^{(n)}ikq^{(n)} \cosh[-q^{(n)} \cdot h(n-1)], \\
M(4n-4, 4n-1) &= -\mu^{(n)}[k^2 + s^{(n)2}] \sinh[-s^{(n)} \cdot h(n-1)], \\
M(4n-4, 4n-0) &= -\mu^{(n)}[k^2 + s^{(n)2}] \cosh[-s^{(n)} \cdot h(n-1)], \\
M(4n-3, 4n-7) &= -ik \cosh[-q^{(n-1)} \cdot h(n-1)], \\
M(4n-3, 4n-6) &= -ik \sinh[-q^{(n-1)} \cdot h(n-1)], \\
M(4n-3, 4n-5) &= -s^{(n-1)} \cosh[-s^{(n-1)} \cdot h(n-1)], \\
M(4n-3, 4n-4) &= -s^{(n-1)} \sinh[-s^{(n-1)} \cdot h(n-1)], \\
M(4n-3, 4n-3) &= -ik \cosh[-q^{(n)} \cdot h(n-1)], \\
M(4n-3, 4n-2) &= -ik \sinh[-q^{(n)} \cdot h(n-1)], \\
M(4n-3, 4n-1) &= -s^{(n)} \cosh[-s^{(n)} \cdot h(n-1)], \\
M(4n-3, 4n-0) &= -s^{(n)} \sinh[-s^{(n)} \cdot h(n-1)], \\
M(4n-2, 4n-7) &= q^{(n-1)} \sinh[-q^{(n-1)} \cdot h(n-1)], \\
M(4n-2, 4n-6) &= q^{(n-1)} \cosh[-q^{(n-1)} \cdot h(n-1)], \\
M(4n-2, 4n-5) &= -ik \sinh[-s^{(n-1)} \cdot h(n-1)], \\
M(4n-2, 4n-4) &= -ik \cosh[-s^{(n-1)} \cdot h(n-1)], \\
M(4n-2, 4n-3) &= q^{(n)} \sinh[-q^{(n)} \cdot h(n-1)], \\
M(4n-2, 4n-2) &= q^{(n)} \cosh[-q^{(n)} \cdot h(n-1)], \\
M(4n-2, 4n-1) &= -ik \sinh[-s^{(n)} \cdot h(n-1)], \\
M(4n-2, 4n-0) &= -ik \cosh[-s^{(n)} \cdot h(n-1)], \\
M(4N-1, 4N-3) &= [-\lambda^{(N)}k^2 + \lambda^{(N)}q^{(N)2} + 2\mu^{(N)}q^{(N)2}] \cosh[-q^{(N)} \cdot h(N)], \\
M(4N-1, 4N-2) &= [-\lambda^{(N)}k^2 + \lambda^{(N)}q^{(N)2} + 2\mu^{(N)}q^{(N)2}] \sinh[-q^{(N)} \cdot h(N)], \\
M(4N-1, 4N-1) &= -2\mu^{(N)}iks^{(N)} \cosh[-s^{(N)} \cdot h(N)], \\
M(4N-1, 4N-0) &= -2\mu^{(N)}iks^{(N)} \sinh[-s^{(N)} \cdot h(N)], \\
M(4N, 4N-3) &= -2\mu^{(N)}ikq^{(N)} \sinh[-q^{(N)} \cdot h(N)], \\
M(4N, 4N-2) &= -2\mu^{(N)}ikq^{(N)} \cosh[-q^{(N)} \cdot h(N)], \\
M(4N, 4N-1) &= -\mu^{(N)}[k^2 + s^{(N)2}] \sinh[-s^{(N)} \cdot h(N)], \\
M(4N, 4N-0) &= -\mu^{(N)}[k^2 + s^{(N)2}] \cosh[-s^{(N)} \cdot h(N)],
\end{aligned}$$

其中 $2 \leq n \leq N$, $h(n)$ 为第 n 层板底部到第一层板上端的距离。