

◇ 2015 年度全国检测声学会议优秀论文专栏 ◇

## 被孔隙介质约束的弹性杆中的导波\*

童紫薇 韩庆邦<sup>†</sup> 姜学平 张雨 齐立华 朱昌平

(河海大学物联网工程学院 常州 213022)

**摘要** 为了研究导波在被孔隙介质约束的弹性杆结构中的传播规律,分析孔隙参数对导波传播特性的影响,本文建立了无限大孔隙介质包裹圆柱体的理论模型,利用孔隙介质弹性波动理论,分析了导波的频散曲线,以及圆柱半径和孔隙参数对于导波传播特性的影响。结果表明,在该结构中传播的纵向导波存在频散特性。内部圆柱半径的改变影响波导结构,从而影响导波传播。外部孔隙介质的渗透率对于导波频散的影响较小,孔隙度的改变影响孔隙介质体波波速,从而影响导波频散曲线的截止频率。同时,导波存在较小的衰减,且衰减随孔隙度增大而增大。这些结果对于后续开展无限大介质包裹弹性杆结构的超声无损评价提供了一定的理论参考。

**关键词** 导波,孔隙介质,频散特性

**中图分类号:** O426.2

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1000-310X(2016)05-0384-11

**DOI:** 10.11684/j.issn.1000-310X.2016.05.002

## Guided waves in a solid rod surrounded by porous media

TONG Ziwei HAN Qingbang JIANG Xueping ZHANG Yu QI Lihua ZHU Changping

(College of IOT Engineering of Hohai University, Changzhou 213022, China)

**Abstract** To derivate the propagation characteristics of guided waves in a solid rod surrounded by porous media and analyze the effects of the porous media parameters to the dispersion characteristic, a model of solid rod surrounded by porous media is built. Based on the elastic-dynamic theory of liquid-saturated porous solid and numerical computation, the dispersion characteristic of guided waves in this structure with different cylinder radius and porous medium parameters are discussed. Results show that the longitudinal guided wave propagation in this structure is dispersive and influenced by the radius of the rod and porosity of the porous medium. The porosity has a certain effect on the dispersion and attenuation characteristic, which can provide a theoretical reference for the non-destructive evaluation to the structure of a solid rod surrounded by infinite media.

**Key words** Guided waves, Porous media, Dispersion

2015-12-01 收稿; 2016-06-30 定稿

\*国家自然科学基金(11274091, 11574072, 11274092), 河海大学中央高校基金项目(2011B11014)

作者简介: 童紫薇(1991-), 女, 福建龙岩人, 硕士研究生, 研究方向: 超声检测。

<sup>†</sup> 通讯作者 E-mail: hqb0092@163.com

## 1 引言

研究被无限大孔隙介质约束的弹性杆中导波的传播特性具有重要的理论意义和实用背景。例如,在岩土加固工程中,通过在岩石中插入金属锚杆,并在锚杆与岩石间灌注水泥浆使其成为一个整体,以增强岩体的整体稳定性。对于这种锚杆锚固质量的超声无损检测,就是一个重要的研究课题,其中一个重要的理论基础就是声波在其中的传播问题。锚固系统可近似看作无限介质包裹弹性杆结构。目前,对于无限大弹性介质包裹固体圆柱结构中导波的传播问题已有一定的研究基础<sup>[1-2]</sup>,但当锚固系统中出现岩石破碎,或岩石间灌浆不密实时,弹性介质不能模拟这一情况,而孔隙介质却能较好的反映。由此研究导波在无限大孔隙介质包裹弹性杆中的传播具有重要意义。

目前针对波在多层孔隙介质中的传播问题研究多集中在平面上<sup>[3-4]</sup>,对于导波在柱状分层孔隙介质的传播特性研究相对较少,且多集中在测井领域,即内部为液体,外部为孔隙介质的情况<sup>[5-7]</sup>。本文针对锚固系统,用孔隙介质模拟含裂缝和孔隙的岩石,以及岩石间灌浆不密实情况,通过研究导波在被无限大孔隙介质约束的弹性杆中的传播特性,重点研究孔隙介质参数对于导波传播的影响,为今后开展外部由含孔隙的无限大介质包裹弹性杆结构的超声无损检测提供参考。

本文对于被无限大孔隙介质约束的弹性杆中导波的传播特性研究:(1)建立了无限大孔隙介质层包裹圆柱杆的理论模型。(2)由弹性动力学理论推导了该模型下纵向导波的频散方程。(3)利用数值方法计算了该频散方程的解,得到了对应的频散曲线和位移强度曲线,并进行了分析。(4)对比分析了孔隙参数和内部圆柱半径对纵向导波频散的影响,以及孔隙度对衰减的影响。

## 2 孔隙介质理论基础

在描述孔隙介质中弹性波的传播问题里,Biot理论是被广泛承认和应用的一个理论模型。根据Biot理论,孔隙介质是由固体骨架和孔隙构成的均匀各向同性介质,其孔隙分布一致,孔隙大小均匀,相互连通,孔隙内充满黏滞流体,流体相对骨架运

动,两者的运动相互耦合。同时流体饱和孔隙介质满足应力-应变关系和运动方程,得到孔隙介质中存在快纵波、慢纵波、横波三种体声波。其中快纵波是由于流固间的同相运动所致,慢纵波是由于固体与流体之间的反相运动所致<sup>[8-10]</sup>,快纵波和慢纵波的波数分别为 $k_{p1} = \omega s_{p1}$ , $k_{p2} = \omega s_{p2}$ ,横波的波数为 $k_t = \omega s_t$ , $\omega$ 为角频率。 $s_{p1}$ , $s_{p2}$ , $s_t$ 分别为

$$s_{p1,p2}^2 = \frac{\gamma}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \frac{\tilde{\rho}\rho - \rho_f^2}{HM - C^2}} \quad (\text{对于 } s_{p1}^2 \text{ 根号前取负号}), \quad (1)$$

$$s_t^2 = \frac{1}{N} \left( \rho - \frac{\rho_f^2}{\tilde{\rho}} \right), \quad (2)$$

其中

$$\gamma = \frac{\rho M + \tilde{\rho} H - 2\rho_f C}{HM - C^2}, \quad (3)$$

$H$ 、 $M$ 、 $C$ 和 $N$ 是孔隙介质的四个弹性常数<sup>[11]</sup>。 $H$ 、 $C$ 、 $M$ 可用固体基质体积模量 $K_s$ ,流体体积模量 $K_f$ ,骨架体积模量 $K_b$ 和剪切模量 $N$ ,孔隙度 $\beta$ 表示:

$$M = \frac{K_f K_s}{\beta K_s + (\alpha - \beta) K_f}, \quad (4)$$

$$C = \alpha M, \quad (5)$$

$$H = \alpha^2 M + K_b + \frac{4}{3} N, \quad (6)$$

$$\alpha = 1 - \frac{K_b}{K_s}, \quad (7)$$

$\rho$ 为流体饱和孔隙介质的体密度,可由固相骨架的固体密度 $\rho_s$ 和流体的密度 $\rho_f$ 得到

$$\rho = (1 - \beta)\rho_s + \beta\rho_f, \quad (8)$$

$\tilde{\rho}$ 为渗流运动之惯性力和阻力相关的等效密度,在引入动态渗透率<sup>[12]</sup>后,

$$\tilde{\rho} = \frac{i\eta}{\omega\kappa(\omega)}, \quad (9)$$

$$\kappa(\omega) = \kappa_0 \left[ \left( 1 - \frac{4i\alpha_\infty^2 \kappa_0^2 \rho_f \omega}{\Lambda^2 \beta^2 \eta} \right)^{\frac{1}{2}} - i \frac{\omega \alpha_\infty \rho_f \kappa_0}{\beta \eta} \right]^{-1}, \quad (10)$$

$$\alpha_\infty = \frac{1}{2}(\beta^{-1} + 1), \quad (11)$$

其中 $\kappa_0$ 为静态渗透率, $\eta$ 为黏滞系数, $\Lambda$ 为孔隙特征尺寸, $\alpha_\infty$ 为孔隙弯曲度,式(11)为Berryman<sup>[13]</sup>提出的近似公式。

### 3 频散方程建立

设置模型为均匀无限大孔隙介质包裹无限长圆柱杆结构,如图1所示,其中  $c_{ft2}$ ,  $c_{st2}$ , 和  $c_{t2}$  分别为孔隙介质的快纵波波速,慢纵波波速和横波波速,  $\rho_s, \rho_f$  为孔隙介质中固体骨架和流体的密度;  $c_{t1}$ ,  $c_{t1}$ ,  $\rho_1$  为内部弹性介质的纵波波速,横波波速和密度。选取柱坐标系,令  $z$  轴沿着固体圆柱杆方向。本文中主要考虑声源为对称点源的情况,即传播的波为纵向导波。

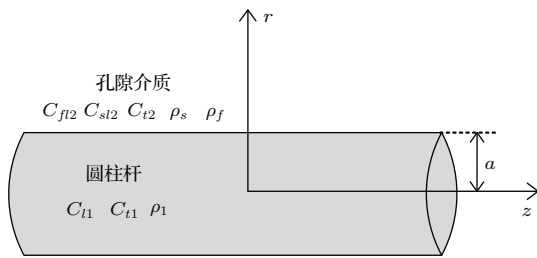


图1 无限大孔隙介质包裹无限长圆柱杆示意图  
Fig. 1 The schematic of infinite long solid rod embedded in infinite porous medium

引入位移势函数  $\Phi, \Psi$ , 分别为P波、SV波的位移势函数,满足赫姆霍兹方程,由此内部圆柱杆的势函数解可写为

$$\begin{cases} \Phi_1 = [A_1 I_0(\alpha_1 r) + K_0(\alpha_1 r)] e^{i(kz - \omega t)}, \\ \Psi_1 = A_2 I_0(\beta_1 r) e^{i(kz - \omega t)}, \end{cases} \quad (12)$$

其中  $\alpha_1^2 = k^2 - k_{t1}^2$ ,  $\beta_1^2 = k^2 - k_{t1}^2$ ,  $k_{t1} = \omega/c_{t1}$ ,  $k_{t1} = \omega/c_{t1}$ ,  $k$  为波数,  $A_1, A_2$  为待求系数。

对于外部均匀无限大的孔隙介质包裹层,其势函数的解分为固相和液相两部分,对固相,快纵波势函数,慢纵波势函数,横波势函数分别为

$$\Phi_{sf} = B_1 K_0(\alpha_{21} r) e^{i(kz - \omega t)}, \quad (13)$$

$$\Phi_{ss} = B_2 K_0(\alpha_{22} r) e^{i(kz - \omega t)}, \quad (14)$$

$$\Psi = B_3 K_0(\beta_{21} r) e^{i(kz - \omega t)}, \quad (15)$$

从而得到纵波总势函数为  $\Phi_s = \Phi_{sf} + \Phi_{ss}$ ,横波总势函数为  $\Psi_s = \Psi$ 。其中  $\alpha_{21}^2 = k^2 - k_{p1}^2$ ,  $\alpha_{22}^2 = k^2 - k_{p2}^2$ ,  $\beta_{21}^2 = k^2 - k_t^2$ , 快纵波波数  $k_{p1}$ , 慢纵波波数  $k_{p2}$  和横波波数  $k_t$  可根据式(1)、式(2)计算求得。  $B_1, B_2, B_3$  为待求系数。

对液相,

$$\Phi_f = \eta_1 \Phi_{sf} + \eta_2 \Phi_{ss}, \quad (16)$$

$$\Psi_f = \eta_3 \Psi_s, \quad (17)$$

其中  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$  分别为快纵波,慢纵波和横波的液相参与系数<sup>[14]</sup>。

对于弹性固体介质的位移应力表达式如下:

$$\begin{cases} u_{r1} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial r \partial z}, \\ u_{z1} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} - \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_1}{\partial r}, \\ \sigma_{rr1} = 2\mu_1 \frac{\partial u_{r1}}{\partial r} \\ \quad + \lambda_1 \left( \frac{u_{r1}}{r} + \frac{\partial u_{r1}}{\partial r} + \frac{\partial u_{z1}}{\partial z} \right), \\ \sigma_{rz1} = \mu_1 \left( \frac{\partial u_{r1}}{\partial z} + \frac{\partial u_{z1}}{\partial r} \right). \end{cases} \quad (18)$$

孔隙介质的位移应力表达式如下:

$$\begin{cases} u_{rs} = \frac{\partial \Phi_s}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Psi_s}{\partial r \partial z}, \\ u_{zs} = \frac{\partial \Phi_s}{\partial z} - \frac{\partial^2 \Psi_s}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_s}{\partial r}, \\ u_{rf} = \frac{\partial \Phi_f}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Psi_f}{\partial r \partial z}, \\ u_{zf} = \frac{\partial \Phi_f}{\partial z} - \frac{\partial^2 \Psi_f}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_f}{\partial r}, \\ \sigma_{rrs} = 2N \frac{\partial u_{rs}}{\partial r} \\ \quad + A \left( \frac{u_{rs}}{r} + \frac{\partial u_{rs}}{\partial r} + \frac{\partial u_{zs}}{\partial z} \right) \\ \quad + Q \left( \frac{u_{rf}}{r} + \frac{\partial u_{rf}}{\partial r} + \frac{\partial u_{zf}}{\partial z} \right), \\ \sigma_{rrf} = Q \left( \frac{u_{rs}}{r} + \frac{\partial u_{rs}}{\partial r} + \frac{\partial u_{zs}}{\partial z} \right) \\ \quad + R \left( \frac{u_{rf}}{r} + \frac{\partial u_{rf}}{\partial r} + \frac{\partial u_{zf}}{\partial z} \right), \\ \sigma_{rzs} = N \left( \frac{\partial u_{rs}}{\partial z} + \frac{\partial u_{zs}}{\partial r} \right), \end{cases} \quad (20)$$

其中  $\lambda_1, \mu_1$  为弹性固体介质的拉梅常数,  $A, N$  为孔隙介质的拉梅常数,  $A = P - 2N$ 。  $P, Q, R$  为多孔介质的物理常数<sup>[15]</sup> 见式(22)~(24), 系数  $R$  是保持总体积恒定的情况下,一定体积的流体进入骨架时对流体产生的压力大小。系数  $Q$  是固体和液体体积改变的耦合系数。

$$P = \frac{(1 - \beta)(1 - \beta - K_b/K_s)K_s + \beta K_s K_b/K_f}{1 - \beta - K_b/K_s + \beta(K_s/K_f)} + \frac{4}{3}N, \quad (22)$$

$$Q = \frac{(1 - \beta - K_b/K_s)\beta K_s}{1 - \beta - K_b/K_s + \beta(K_s/K_f)}, \quad (23)$$

$$R = \frac{\beta^2 K_s}{1 - \beta - K_b/K_s + \beta(K_s/K_f)}. \quad (24)$$

在界面 ( $r = a$ ) 处, 位移、应力连续, 并考虑到弹性固体是不可渗透材料, 即在边界上限制孔隙介质的流出, 固相骨架的法向位移等于流体的法向位移<sup>[14]</sup>, 即存在如下边界条件:

$$\begin{cases} u_{r1} = (1 - \beta)u_{rs} + \beta u_{rf}, \\ u_{z1} = u_{zs}, \\ \sigma_{rr1} = \sigma_{rrs} + \sigma_{rrf}, \\ \sigma_{rz1} = \sigma_{rzs}, \\ u_{rs} = u_{rf}. \end{cases} \quad (25)$$

将用势函数表示的位移应力表达式(18)~(21)代入这五个边界条件, 即可得到带有  $A_1, A_2, B_1, B_2, B_3$  这五个待定系数的方程组

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} & m_{15} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} & m_{25} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} & m_{35} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} & m_{45} \\ m_{51} & m_{52} & m_{53} & m_{54} & m_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (26)$$

其中  $m_{ij}, b_i$  的表达式见附录。当  $b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = 0$ , 该矩阵方程组有非零解的充分必要条件是系数行列式为0, 即为频散方程。

$$\Delta = \det [m_{ij}] = 0, \quad i, j = 1, \dots, 5, \quad (27)$$

求解频散方程式(27), 即可得到一定频率范围内的导波频散曲线。

相应地, 可得到对应的位移强度表达式<sup>[2]</sup>, 如圆柱杆的径向位移强度可表示为

$$u_{r1}(\omega, r, z) = 2\pi i \sum_p \left[ \frac{(m_{11}\Delta_1 + m_{12}\Delta_2)}{\partial\Delta/\partial k_z} \right] \Big|_{k_z=k_{zp}}, \quad (28)$$

其中  $\Delta_1, \Delta_2$  可由克莱姆法则求得,  $k_{zp}$  为频散方程式(27)的根。本文在计算模式波的位移强度时, 计算的是位移绝对值。

为从理论上证明上述声场表述和频散方程建立过程的准确性。令孔隙介质孔隙度  $\beta = 0$ , 由式(1)、式(2)得到快纵波波速  $c_{f12}$  和横波波速  $c_{t2}$  分别为孔隙介质固体基质的纵波波速和横波波

速, 慢纵波波速  $c_{sl2}$  为0, 所以对于势函数的解不再具有慢纵波势函数, 同时由于液相参与系数  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$  为0, 对应液相势函数为0。且当孔隙度为0时,  $K_b = K_s, N = \mu_s$ , 由式(22)~(24)可得  $P = K_s + \frac{4}{3}N = K_s + \frac{4}{3}\mu_s, Q = 0, R = 0, A = K_s - \frac{2}{3}N = \lambda_s$ , 其中  $\lambda_s, \mu_s$  为孔隙介质固体基质的拉梅常数。此时孔隙介质的位移应力表达式(20), 式(21)可化简如下:

$$\begin{cases} u_{rs} = \frac{\partial\Phi_s}{\partial r} + \frac{\partial^2\Psi_s}{\partial r\partial z}, \\ u_{zs} = \frac{\partial\Phi_s}{\partial z} - \frac{\partial^2\Psi_s}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial\Psi_s}{\partial r}, \end{cases} \quad (29)$$

$$\begin{cases} \sigma_{rrs} = 2\mu_s \frac{\partial u_{rs}}{\partial r} + \lambda_s \left( \frac{u_{rs}}{r} + \frac{\partial u_{rs}}{\partial r} + \frac{\partial u_{zs}}{\partial z} \right), \\ \sigma_{rzs} = \mu_s \left( \frac{\partial u_{rs}}{\partial z} + \frac{\partial u_{zs}}{\partial r} \right). \end{cases} \quad (30)$$

相应地边界条件式(25)可化为

$$\begin{cases} u_{r1} = u_{rs}, \\ u_{z1} = u_{zs}, \\ \sigma_{rr1} = \sigma_{rrs}, \\ \sigma_{rz1} = \sigma_{rzs}. \end{cases} \quad (31)$$

由式(29)~(31)可看出此时的位移应力表达式和边界条件对应为弹性杆和杆外介质为均匀完全弹性介质的情况<sup>[1]</sup>, 因而由此建立的频散方程也满足这种情况。以上可证明当孔隙介质退化为均匀完全弹性介质时, 本文所给出的声场表述和频散方程符合两种介质为均匀完全弹性的声场情况。从而证明了本文声场表述和推导过程的准确性。

#### 4 数值模拟与分析

本文针对被无限大孔隙介质约束的弹性杆结构, 选取合适的孔隙岩石和固体杆材料进行数值模拟。

对于沿固体弹性杆传播的导波模式, 要求相速度小于包裹层介质的横波波速<sup>[1]</sup>, 即  $\beta_{21}^2 > 0$ ; 当满足这个条件时, 径向上无能量的扩散, 从而能沿固体杆长距离稳定传播。当然, 由于固体杆由无限大的孔隙介质包裹, 且孔隙介质具有耗散作用, 因此由频

散方程式(27)得到的根为复数,即存在衰减,因而严格地说该波并非导波,但由于求得根的虚部都很小,对应的衰减系数很小,大多情况下人们仍称为导波。本文主要研究导波的相关特性,通过数值方法求解不同孔隙介质参数和不同内部圆柱半径下频散方程(式(27))的数值解,进而对导波的频散特性和位移幅度特性进行分析。

选取的参数(参考文献[1]模型2数据)如表1所示。

对应于孔隙度为0.1时,孔隙介质参数如表2所示。

表1 模型材料参数

Table 1 Material parameters

介质	纵波波速 (m/s)	横波波速 (m/s)	密度 (kg/m <sup>3</sup> )
弹性固体	4100	2100	7800
孔隙介质	固体基质	5370	3100
	孔隙流体	1483	998

表2 孔隙介质参数表

Table 2 Material parameters of porous medium

参数	数值
孔隙度 $\beta$ (%)	10%
孔隙弯曲度 $\alpha_\infty$	5.5
静态渗透率 $\kappa_0$ (m <sup>2</sup> )	$10^{-12}$
黏滞系数 $\eta$ (kg·s <sup>-1</sup> ·m <sup>-1</sup> )	0.001
孔隙特征尺寸 $\Lambda$ ( $\mu$ m)	8
固体颗粒体积模量 $K_s$ (GPa)	43.33
流体体积模量 $K_f$ (GPa)	2.19
固体骨架体积模量 $K_b$ (GPa)	33.70
固体骨架剪切模量 $N$ (GPa)	20.86

在孔隙介质中,固体骨架体积模量  $K_b$  和固体骨架剪切模量  $N$  可由复合介质的等效弹性模量自洽公式<sup>[10]</sup>计算得出。在不同的孔隙度下,固体骨架的体积模量  $K_b$  和剪切模量  $N$  会改变,如图2所示。考虑到孔隙度达到0.5以后,孔隙介质变成了悬浮体,剪切模量接近于零,体积模量接近于流体的体积模量,而对于岩石类材料,绝大多数孔隙度在0.2以下,因此本文只研究孔隙度小于0.3的情况。从图2可以发现随着孔隙度增大,固体骨架的体积模量和剪切模量均在减小,且呈现明显的线性变化。

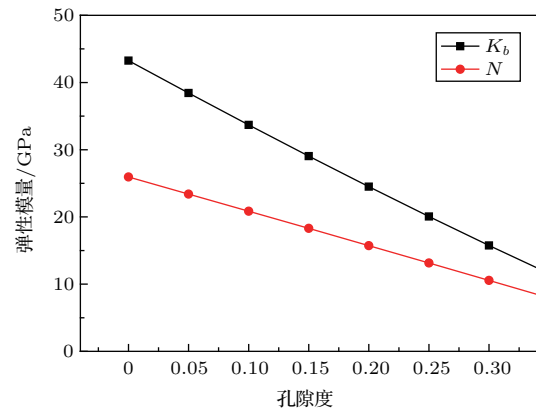


图2 固体骨架体积模量和剪切模量随孔隙度的变化

Fig. 2 Bulk modulus and shear modulus of the porous skeletal frame with different porosity

由于等效密度  $\bar{\rho}$  随着频率变化,故三种体声波波速也随着频率变化,通过式(1)和式(2),即可求得孔隙介质中传播的快纵波、慢纵波、以及横波这三种体声波波速,如图3所示(参数如表2)。由图3可以看出在小于0.1 MHz的频率范围内,横波波速由2872 m/s随着频率增大而逐渐增大到2879 m/s,快纵波波速由4974 m/s随着频率的增大而逐渐增大到4982 m/s,但这两者的变化幅度均不大。当频率大于0.1 MHz后,横波速度和快纵波波速逐渐趋于稳定,不再随频率变化。而慢纵波波速在频率小于0.1 MHz的范围内,随着频率从250 m/s增大到550 m/s,变化幅度较大;当频率大于0.1 MHz后不再随频率变化。由此可看出,快纵波和横波波速几

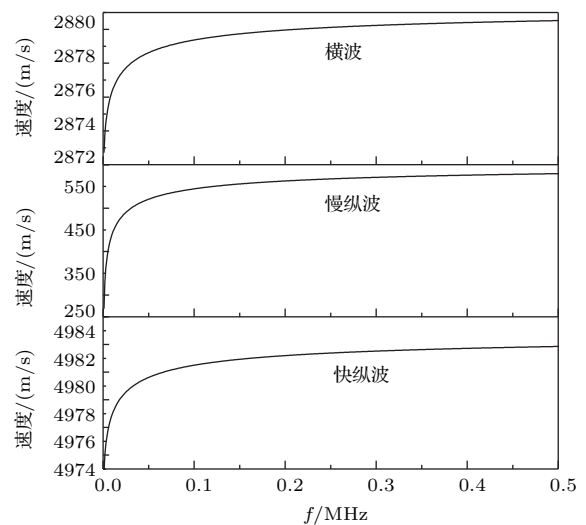


图3 孔隙介质体波波速随频率变化曲线图

Fig. 3 The curve of bulk wave velocity with frequency

乎不受频率影响,慢纵波波速在低频段受频率影响较大。这主要是由于声波在孔隙介质中传播时,孔隙流体和固体骨架都在运动。孔隙流体相对固体骨架运动时遵循达西定律,受黏滞力和惯性力作用。在低频范围内,孔隙中流体的黏滞力占主要作用,从而导致了速度频散。

#### 4.1 导波频散特性和位移幅度谱

本文采用局部峰搜索法,根据Lowe提出的精确求根技术与曲线追踪技术相结合求取频散方程的数值解<sup>[16]</sup>。为再次验证上述理论及计算方法的正确性,首先令孔隙介质的孔隙度 $\beta = 0$ ,将得到的频散曲线与相同内部固体杆材料,而外部为弹性介质材料下的频散曲线<sup>[1]</sup>相比较,如图4所示。从图4中可以看出两种情况完全吻合。

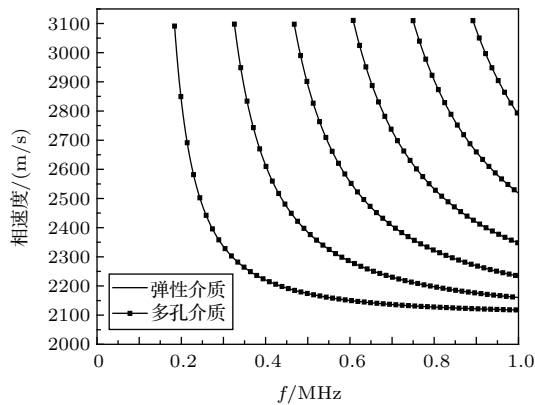


图4 圆柱杆外部为弹性介质与外部为孔隙度等于0的孔隙介质频散曲线

Fig. 4 The dispersion comparison between elastic medium and porous medium of 0 porosity

以表1,表2中的参数计算,对相速度频散、群速度频散以及位移幅度特性进行分析。

图5为相速度和群速度频散曲线。从图5中可以看出导波存在频散特性,并且存在多个模式,称为简正模式。图中所有简正模式均存在截止频率,且在截止频率处相速度为外部包裹层的横波波速(表2参数下,孔隙介质层的横波波速为2880 m/s)。相速度随着频率的增大而减小,群速度随着频率的增大而增大,在高频处均趋近于内部弹性杆横波波速(2100 m/s)。另外,由于本文选取的模型材料参数不满足斯通利波的存在条件<sup>[17]</sup>,故图4和图5中不存在斯通利模式。

由此,对于弹性杆内声场,由于相速度大于固体杆横波波速, $\beta_1$ 为纯虚数,式(12)中SV波的位移

位随着半径 $r$ 变化而振荡,幅度在固体杆中心最大。而对于包裹层内声场,相速度小于包裹层横波波速, $\alpha_{21}, \beta_{21}$ 为实数,式(13)和式(15)中快纵波和横波位移均随半径 $r$ 增大而呈指数衰减<sup>[18]</sup>。

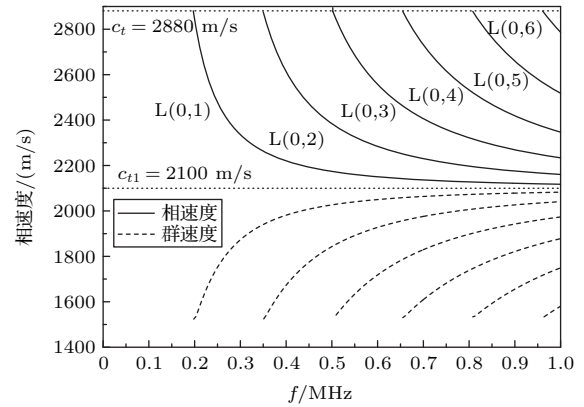


图5 频散特性曲线

Fig. 5 Velocity dispersion curves

根据式(28)计算导波L(0,1)模式和L(0,2)模式在界面( $r = 0.01$  m)的径向位移强度曲线,如图6所示。从图6中可以看出,对于L(0,1)模式,在频率为0.2 MHz附近,径向位移分量达到最大,而在频率为0.2 MHz附近群速度也达到最小值,由此可见该模式的位移分量在群速度最小值附近达到最大值。这一特征可利于有效地寻找导波的有效激发频率范围,当控制声源的频率范围使频率在L(0,1)模式群速度最小的频率范围附近,就可以有效地激发强度较大的导波模式。同时L(0,2)模式的径向位移最大值约为L(0,1)模式径向位移最大值的10%,由此,

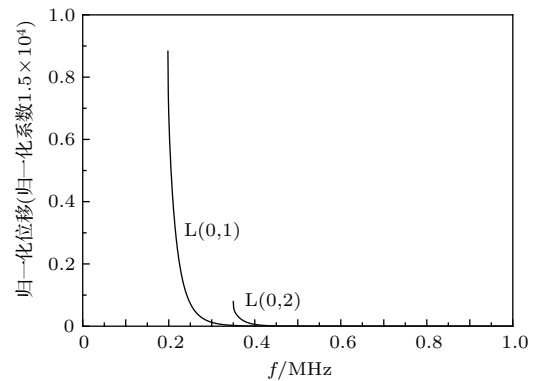


图6 径向位移强度曲线图

Fig. 6 Radial displacement amplitude spectra of the longitudinal modes

在本文的模型中,主导模式不仅是纵向模式L(0,1),也包括纵向模式L(0,2)。

### 4.2 内部弹性杆半径对导波频散的影响

考虑到模型结构是影响导波频散的一个重要因素。因而本节将分析内部圆柱半径对导波频散的影响。设置参数如表1,表2所示。选取圆柱半径分别为0.01 m,0.03 m,0.05 m,0.07 m,得到L(0,1)模式的相速度频散曲线如图7所示,从图7中可以看出,当相速度相同时,半径越大,所对应的频率越小,即半径增大,导波相速度频散曲线向低频方向移动,同时频散曲线的截止频率减小。但弹性杆半径的改变并不改变导波截止频率处的相速度,仍为孔隙介质的横波波速。

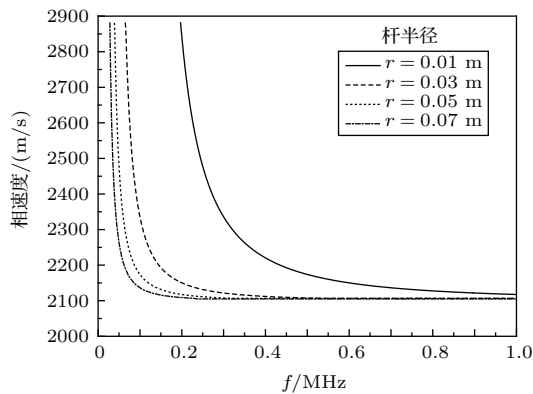


图7 不同圆柱半径下的导波频散曲线

Fig. 7 Dispersion curves with different cylinder radius

### 4.3 孔隙参数对导波频散的影响

#### 4.3.1 孔隙度对导波频散的影响

为了确定孔隙介质的孔隙度对导波频散的影响,设定静态渗透率  $\kappa_0 = 10^{-12} \text{ m}^2$ ,选取孔隙度为0.1,0.2,0.3,其它参数不变,进行计算分析。

对于外部孔隙介质包裹层,当孔隙度变化时,体波波速发生改变,如图8所示。发现随着孔隙度增大,快纵波波速和横波波速均在减小而慢纵波波速增大。而由于沿固体弹性杆传播的导波模式,要求相速度小于包裹层介质的横波波速<sup>[1]</sup>,因此导波相速度应在  $[c_{t1}, c_t]$  的范围内。由此,不同孔隙度下导波的频散特性曲线如图9所示。从图9中可发现当孔隙度分别为0.1,0.2,0.3时,导波各个模式在截止频率的相速度为该孔隙度下孔隙介质的横波波速分别为2880 m/s, 2617 m/s, 2263 m/s。相对

应的随着孔隙度的增大,相同模式下的截止频率增大。但孔隙度的改变,并不改变频散曲线的变化趋势,从图9中可看出三种孔隙度下的频散曲线在对应范围内重合,同时导波相速度仍随着频率的增大而减小,并在高频处趋近于固体弹性杆的横波波速(2100 m/s)。

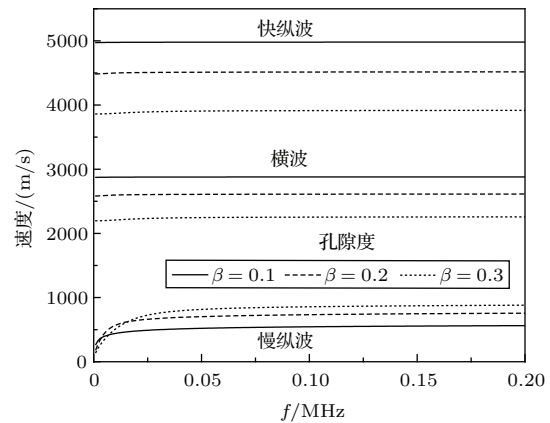


图8 不同孔隙度时孔隙介质的体波波速

Fig. 8 Bulk wave velocity of porous medium with different porosity

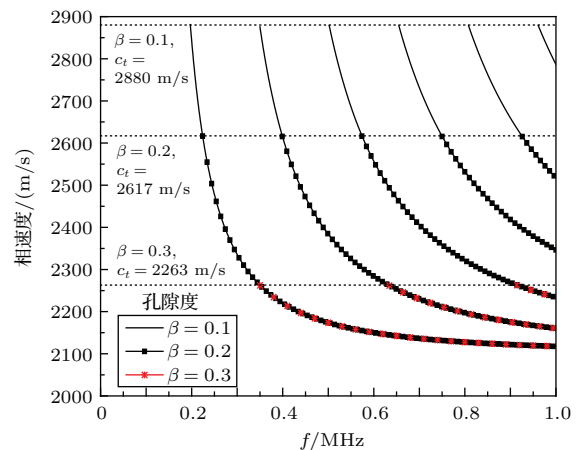


图9 不同孔隙度下的频散曲线对比

Fig. 9 Dispersion curves with different porosity

#### 4.3.2 渗透率对导波频散的影响

渗透率是与孔隙结构有关的重要参数,它反映了孔隙介质传导流体的能力。为了考察渗透率对导波频散的影响,分别选取静态渗透率  $\kappa_0 = 10^{-10} \text{ m}^2, \kappa_0 = 10^{-11} \text{ m}^2, \kappa_0 = 10^{-12} \text{ m}^2$ ,设定孔隙度为0.1,计算得到不同静态渗透率下的频散曲线如图10所示,从图10中可以看出,静态渗透率的改变对于频散曲线几乎没有影响。而分析不同静

态渗透率下, 孔隙介质的三种体波波速, 如表3所示, 发现静态渗透率对于孔隙三种体波波速影响很小, 因而对于频散曲线的影响也很小。

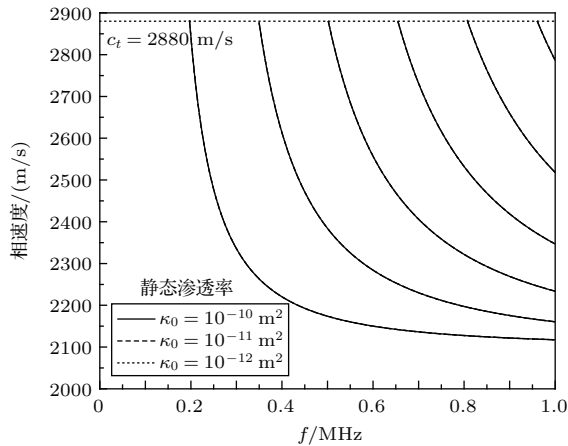


图10 不同静态渗透率下纵向模式频散曲线对比  
Fig. 10 Dispersion curves of longitudinal modes with different static permeability

表3 不同静态渗透率时孔隙的体波波速

Table 3 Body wave velocity of porous medium with different static permeability

静态渗透率 $\kappa_0$ ( $\text{m}^2$ )	快纵波波速 ( $\text{m/s}$ )	慢纵波波速 ( $\text{m/s}$ )	横波波速 ( $\text{m/s}$ )
$10^{-10}$	4981.86	579.32	2880.52
$10^{-11}$	4981.86	579.32	2880.52
$10^{-12}$	4981.86	579.34	2880.52

#### 4.4 孔隙参数对导波衰减的影响

对于被均匀无限弹性介质包裹的弹性杆中的纵向导波, 其轴向波数为实数, 不存在衰减。而对于被孔隙介质约束的弹性杆中的导波, 由于孔隙介质具有耗散作用, 因此由频散方程式(27)得到的根为复数, 即存在衰减。下面将具体分析孔隙度对导波衰减的影响。

设定静态渗透率  $\kappa_0 = 10^{-12} \text{ m}^2$ , 选取孔隙度为0.1, 0.2, 0.3, 计算不同孔隙度下的导波纵向模式  $L(0,1)$  的衰减如图11所示。由图11发现, 导波的衰减系数很小。由于相速度频散曲线具有截止频率, 相对应的衰减曲线也具有相同的截止频率。对于任一孔隙度下, 导波衰减在艾里相附近最大, 之后随着频率的增大而减小, 这与文献[18] 10.3节的衰减曲

线的变化趋势相一致, 这主要是由于当频率较低时孔隙介质中流体的黏滞力起主要作用, 因此衰减较大, 而在高频情况下, 流体的惯性力起主要作用, 因此随着频率增大衰减系数减小。在同一频率下, 随着孔隙度的增大, 导波衰减增大。这说明孔隙度的改变对于导波的衰减有着一定的影响, 当孔隙度增加时, 孔隙介质层内的流体增多, 从而使得纵向导波耗散到孔隙介质层的能量增大。

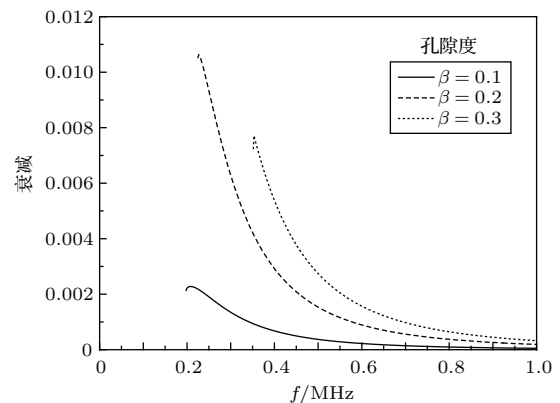


图11 不同孔隙度下纵向模式衰减曲线对比  
Fig. 11 Attenuation curves of longitudinal modes with different porosity

#### 4.5 岩石材料对导波频散的影响

由于在本文所构建的理论模型中, 无限大的孔隙介质层多为含孔隙的岩石, 因此研究不同岩石材料下的导波频散特性具有重要意义。

对杆中导波有约束的指标是约束介质的“软”和“硬”, 而对于岩石的“软”、“硬”习惯上用泊松比表示。由此本文分别选取“软”的泊松比为0.38的砂岩和“硬”的泊松比为0.22的花岗岩为孔隙岩石, 其对应的材料参数如表4所示。选取孔隙度为0.1, 静态渗透率为  $10^{-12} \text{ m}^2$ , 内部固体杆参数不变。此时根据式(1)、式(2)求得对应孔隙岩石的快纵波波速和横波波速几乎不随频率变化, 对应波速如表5所示。

由表5可知, 当孔隙岩石材料为砂岩时, 在此孔隙介质参数下, 其横波波速(1563 m/s)小于内部弹性杆的横波波速(2100 m/s), 此时不存在任何简正模式。同时由于此参数不满足斯通利波的存在条件, 固不存在斯通利模式。因此由砂岩约束的弹性杆不存在任何的导波模式。



表4 不同岩石的材料参数  
Table 4 Rock parameters

	密度 (kg/m <sup>3</sup> )	泊松比	体积模量 $K_s$ (GPa)	剪切模量 $G$ (GPa)	纵波波速 (m/s)	横波波速 (m/s)
砂岩	2500	0.38	26.8	7	3801.5	1672.5
花岗岩	2800	0.22	43.9	30.2	5485.6	3286.7

表5 孔隙度0.1时,岩石的材料参数

Table 5 Rock parameters when porosity is 0.1

	固体骨架 体积模量 $K_b$ (GPa)	固体骨架 剪切模量 $N$ (GPa)	快纵波 波速 (m/s)	横波 波速 (m/s)
砂岩	17.83	5.69	3423	1563
花岗岩	34.79	24.24	5106	3051

当孔隙岩石基质为花岗岩时,存在导波模式,其导波相速度频散特性曲线如图12所示。由于该参数下不满足斯通利波的存在条件,同样不存在斯通利模式。导波L(0,1)模式的相速度随着频率的增大而减小并逐渐趋近于弹性杆横波波速(2100 m/s),截止频率处的相速度为孔隙岩石的横波波速(3051 m/s)。

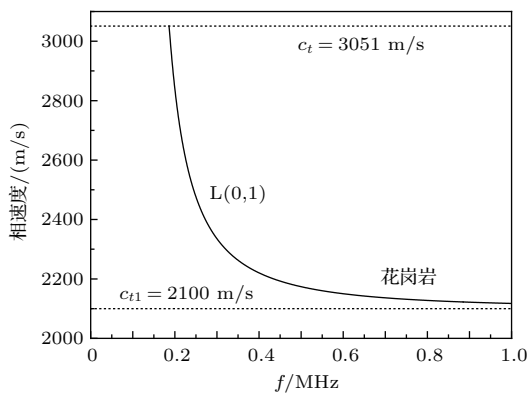


图12 花岗岩L(0,1)模式频散曲线

Fig. 12 Longitudinal mode L(0,1) dispersion curve of granite

## 5 结论

本文研究了被孔隙介质约束的弹性杆中导波的传播特性,分析了孔隙介质约束下圆柱纵向导波的频散特性和位移幅度特性,讨论了内部圆柱半径,以及孔隙介质的孔隙度、渗透率对导波频散特性的影响,分析了孔隙度对导波衰减的影响。结果表明,

当孔隙介质的横波波速大于被其约束的弹性杆的横波波速时,存在导波模式。对于纵向导波模式,存在频散特性,相速度随着频率增大而减小,当不满足斯通利波的存在条件时,在高频下相速度趋近于弹性杆横波波速。孔隙度的改变使得孔隙介质层的快慢纵波和横波速度发生改变,从而对导波的频散特性产生了一定的影响,随着孔隙度的增大,导波频散曲线的截止频率增大。但孔隙度的改变,不会改变导波频散曲线的变化趋势。渗透率的改变,对于导波频散几乎没有影响。由于孔隙介质的耗散作用,导波传播存在一定的衰减,且孔隙度越大,衰减越大。研究被孔隙介质约束的弹性杆中的导波传播,为导波用于无限大介质包裹弹性杆结构的无损评价提供了一定的理论参考。

## 参 考 文 献

- [1] 崔寒茵, 师芳芳, 籍顺心, 等. 沿均匀无限介质固体杆中传播的导波特性研究[J]. 声学学报, 2010, 35(4): 446-454.  
CUI Hanyin, SHI Fangfang, JI Shunxin, et al. Guided waves in a rod surrounded by an infinite solid medium[J]. Acta Acustica, 2010, 35(4): 446-454.
- [2] CUI H Y, ZHANG B X. Excitation and mechanisms and dispersion characteristics of guided waves in multilayered cylindrical solid media[J]. J. Acoust. Soc. Am., 2012, 131(3): 2048-2062.
- [3] 阎守国, 谢馥励, 师芳芳, 等. 含孔隙分层半空间中瑞利波的传播特性研究[J]. 声学学报, 2013, 38(2): 150-155.  
YAN Shouguo, XIE Fuli, SHI Fangfang, et al. Study on the propagation characteristics of Rayleigh wave in multilayered media with porous medium layer[J]. Acta Acustica, 2013, 38(2): 150-155.
- [4] 洪轲, 袁玲, 沈中华, 等. 含孔隙的层状材料中声表面波传播特性研究[J]. 声学学报, 2011, 36(2): 150-155.  
HONG Ke, YUAN Ling, SHEN Zhonghua, et al. Analysis of the propagation characteristics of the surface acoustic waves in porous layered materials[J]. Acta Acustica, 2011, 36(2): 150-155.
- [5] 何晓. 孔隙地层中流体井孔内的模式波[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2006.

- [6] 许楠. 孔隙地层井孔声场模拟与斯通利波衰减拾取渗透率[D]. 吉林: 吉林大学, 2011.
- [7] 李巍, 胡恒山, 张碧星, 等. 柱面分层流体饱和孔隙地层中的声波测井波场模拟[J]. 声学学报, 2010, 35(4): 456–464.  
LI Wei, HU Hengshan, ZHANG Bixing, et al. Simulation of acoustic well-logging wave field in a radially multilayered fluid-saturated porous formation[J]. Acta Acustica, 2010, 35(4): 456–464.
- [8] BIOT M A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid saturated porous rock I. Low frequency range[J]. J. Acoustic. Soc. Am., 1956, 28(2): 179–191.
- [9] STERN M, BEDFORD A, MILLWATER H R. Wave reflection from a sediment layer with depth-dependent properties[J]. J. Acoustic. Soc. Am., 1985, 5(77): 1781–1788.
- [10] 乔文孝, 王琰. Biot理论的数值研究[J]. 中国石油大学学报: 自然科学版, 1990, 14(2): 126–132.  
QIAO Wenxiao, WANG Yan. Numerical investigation of Biot theory[J]. Journal of the University Petroleum: Natural Science, 1990, 14(2): 126–132.
- [11] BIOT M A. Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media[J]. J. Appl. Phys., 1962, 33(4): 1482–1498.
- [12] JOHNSON D L, KOPLIK J, DASHEN R. Theory of dynamic permeability and tortuosity in fluid-saturated porous media[J]. J. Fluid Mech., 1987, 176: 379–402.
- [13] BERRYMAN J G. Long-wavelength propagation in composite elastic media II. Ellipsoidal inclusions[J]. J. Acoustic. Soc. Am., 1980, 68(6): 1820–1831.
- [14] 赵成刚, 高福平. 波在饱和多孔介质与弹性固体介质交界面上的界面效应[J]. 地震工程与工程振动, 1999, 19(1): 1–6.  
ZHAO Chenggang, GAO Fuping. Boundary effect of propagating from liquid-filled porous medium to solid medium[J]. Earthquake Engineering and Engineering Vibration, 1999, 19(1): 1–6.
- [15] BIOT M A, WILLIS D G. The elastic coefficients of the theory of consolidation[J]. J. Appl. Mech., 1957, 15(2): 594–601.
- [16] 马琦, 胡文祥. 液浸层状介质泄漏模式频散特性的分析求解方法[J]. 声学技术, 2013, 32(4): 513–516.  
MA Qi, HU Wenxiang. Methods for analyzing and solving dispersion characteristics of leaky modes of layered structures immersed in fluid[J]. Technical Acoustics, 2013, 32(4): 513–516.
- [17] 崔寒茵, 张碧星. 柱状固体分层介质中的斯通利波[J]. 声学技术, 2010, 29(6): 58–59.  
CUI Hanyin, ZHANG Bixing. Stoneley waves in multilayered cylindrical solid media[J]. Technical Acoustics, 2010, 29(6): 58–59.
- [18] 张海澜, 王秀明, 张碧星. 井孔中的声场和波[M]. 北京: 科学出版社, 1998.

## 附录 A

$$m_{11} = -\alpha_1 I_1(\alpha_1 r),$$

$$m_{12} = -ik\beta_1 I_1(\beta_1 r),$$

$$m_{13} = \alpha_{21} K_1(\alpha_{21} r)(1 - \beta) + \beta\eta_1 \alpha_{21} K_1(\alpha_{21} r),$$

$$m_{14} = \alpha_{22} K_1(\alpha_{22} r)(1 - \beta) + \beta\eta_2 \alpha_{22} K_1(\alpha_{22} r),$$

$$m_{15} = ik\beta_{21} K_1(\beta_{21} r)(1 - \beta) + \beta\eta_3 ik\beta_{21} K_1(\beta_{21} r),$$

$$m_{21} = ikI_0(\alpha_1 r),$$

$$m_{22} = \frac{\beta_1^2}{2} [I_0(\beta_1 r) - I_2(\beta_1 r)] + \frac{\beta_1}{r} I_1(\beta_1 r),$$

$$m_{23} = -ikK_0(\alpha_{21} r),$$

$$m_{24} = -ikK_0(\alpha_{22} r),$$

$$m_{25} = -\frac{\beta_{21}^2}{2} [K_0(\beta_{21} r) - K_2(\beta_{21} r)] - \frac{\beta_{21}}{r} K_1(\beta_{21} r),$$

$$m_{31} = \left( -\mu_1 \alpha_1^2 - \frac{\alpha_1^2}{2} \lambda_1 - k^2 \lambda_1 \right) I_0(\alpha_1 r) - \frac{\alpha_1}{r} \lambda_1 I_1(\alpha_1 r) + \left( \mu_1 \alpha_1^2 + \frac{\alpha_1^2}{2} \lambda_1 \right) I_2(\alpha_1 r),$$

$$m_{32} = -ik\mu_1 \beta_1^2 [I_0(\beta_1 r) - I_2(\beta_1 r)],$$

$$m_{33} = \left[ \left( \frac{\alpha_{21}^2}{2} + k^2 \right) K_0(\alpha_{21} r) + \frac{\alpha_{21}}{r} K_1(\alpha_{21} r) - \frac{\alpha_{21}^2}{2} K_2(\alpha_{21} r) \right] (A + \eta_1 Q + Q + \eta_1 R) + N\alpha_{21}^2 [K_0(\alpha_{21} r) - K_2(\alpha_{21} r)],$$

$$m_{34} = \left[ \left( \frac{\alpha_{22}^2}{2} + k^2 \right) K_0(\alpha_{22} r) + \frac{\alpha_{22}}{r} K_1(\alpha_{22} r) - \frac{\alpha_{22}^2}{2} K_2(\alpha_{22} r) \right] (A + \eta_2 Q + Q + \eta_2 R) + N\alpha_{22}^2 [K_0(\alpha_{22} r) - K_2(\alpha_{22} r)],$$

$$m_{35} = ikN\beta_{21}^2 [K_0(\beta_{21} r) - K_2(\beta_{21} r)],$$

$$m_{41} = -2iku_1 \alpha_1 I_1(\alpha_1 r),$$

$$m_{42} = \mu_1 \left\{ \frac{\beta_1^2}{2r} [I_0(\beta_1 r) - I_2(\beta_1 r)] + \left( k^2 \beta_1 - \frac{3}{4} \beta_1^3 - \frac{\beta_1}{r^2} \right) I_1(\beta_1 r) + \frac{1}{4} \beta_1^3 I_3(\beta_1 r) \right\},$$

$$m_{43} = 2ikN\alpha_{21} K_1(\alpha_{21} r),$$

$$m_{44} = 2ikN\alpha_{22} K_1(\alpha_{22} r),$$

$$m_{45} = -N \left\{ \frac{\beta_{21}^2}{2r} [K_0(\beta_{21}r) - K_2(\beta_{21}r)] \right. \\ \left. + \left( k^2 \beta_{21} - \frac{3}{4} \beta_{21}^3 - \frac{\beta_{21}}{r^2} \right) K_1(\beta_{21}r) \right. \\ \left. + \frac{1}{4} \beta_{21}^3 K_3(\beta_{21}r) \right\},$$

$$m_{51} = 0,$$

$$m_{52} = 0,$$

$$m_{53} = -\alpha_{21}(1 - \eta_1)K_1(\alpha_{21}r),$$

$$m_{54} = -\alpha_{22}(1 - \eta_2)K_1(\alpha_{22}r),$$

$$m_{55} = -ik\beta_{21}(1 - \eta_3)K_1(\beta_{21}r),$$

$$b_1 = \alpha_1 K_1(\alpha_1 r),$$

$$b_2 = ikK_0(\alpha_1 r),$$

$$b_3 = \left( \mu_1 \alpha_1^2 + \frac{\alpha_1^2}{2} \lambda_1 + k^2 \lambda_1 \right) K_0(\alpha_1 r) \\ + \lambda_1 \frac{\alpha_1}{r} K_1(\alpha_1 r) - \left( \mu_1 \alpha_1^2 + \frac{\alpha_1^2}{2} \lambda_1 \right) K_2(\alpha_1 r),$$

$$b_4 = 2ik\mu_1 \alpha_1 K_1(\alpha_1 r),$$

其中  $r$  为内部固体圆柱杆半径,  $k$  为波数,  $I_n(\cdot)$ ,  $K_n(\cdot)$  ( $n = 1, 2, 3$ ) 为  $n$  阶贝塞尔函数, 其它参数均在本文内有说明。