

◇ 研究报告 ◇

# 基于改进基追踪去噪的水声单载波 频域均衡信道估计\*

柳文明<sup>†</sup> 韩树平 李厚全 徐景峰

(海军潜艇学院 青岛 266199)

**摘要** 针对低信噪比下单载波频域均衡信道估计精度低导致均衡效果差的问题,利用基追踪去噪方法估计稀疏信道有效抽头具有的稳定特性,提出了一种在平稳水声信道条件下单载波频域均衡系统中应用的改进基追踪去噪稀疏信道估计方法。方法利用延拓循环前缀作为导频进行多次信道估计,将估计结果累积平均,再采用门限判决提取有效抽头得到信道估计值,从而提高了稀疏信道的估计精度。通过合理选择循环前缀延拓次数,尽可能地降低导频长度对频带利用率的影响。仿真对比分析了改进基追踪去噪算法与匹配滤波、最小平方以及传统基追踪去噪信道估计算法的性能以及对单载波频域均衡系统误码率的影响。仿真实验结果表明,改进基追踪去噪信道估计算法具有更优的估计精度,在单载波频域均衡系统中可以提高约 3 dB 的接收信噪比增益。

**关键词** 基追踪去噪,稀疏信道估计,单载波频域均衡,累积平均

中图分类号: TN929.3

文献标识码: A

文章编号: 1000-310X(2017)05-0417-07

DOI: 10.11684/j.issn.1000-310X.2017.05.007

## Underwater acoustic channel estimation in single carrier frequency domain equalization based on improved basis pursuit denoising

LIU Wenming HAN Shuping LI Houquan XU Jingfeng

(Naval Submarine Academy, Qingdao 266199, China)

**Abstract** Considering that underwater acoustic channel estimation in single carrier frequency domain equalization is imprecise in the condition of low SNR, and lead to low equalization precision, based on the stability characteristics of estimating effective taps of sparse channel using the basis pursuit denoising (BPDN) method, an improved BPDN estimation method for sparse channel is proposed in SC-FDE system in stable underwater acoustic channel. By using the extension of the cyclic prefix as a pilot to estimate channel repeatedly, cumulate average the estimation results, then extract the effective channel tap estimates by threshold decision, thus improving the estimation accuracy of the sparse channel. By choosing the proper number of cyclic prefix extension, the effect of pilot frequency on the frequency band utilization is reduced as much as possible. The performance of the improved BPDN algorithm and matched filtering, least square and traditional BPDN channel estimation algorithms are analyzed and compared, and the influence on bit-error-ratio of SC-FDE system is analyzed. Simulation results show that the improved BPDN channel estimation algorithm has better estimation accuracy, and can increase the received SNR gain about 3 dB in the SC-FDE system.

**Key words** Basis pursuit denoising, Sparse channel estimation, Single carrier frequency domain equalization, Cumulate average

2017-03-29 收稿; 2017-07-21 定稿

\*中国博士后基金资助项目 (2014M552658)

作者简介: 柳文明 (1985-), 男, 山东青岛人, 博士研究生, 研究方向: 水声信号处理。

<sup>†</sup> 通讯作者 E-mail: wsonar@163.com

## 1 引言

水声信道是复杂的多途信道,通信接收机需要采用均衡技术来消除多途效应带来的码间干扰(ISI)。对于高速水声通信而言,ISI可高达几十甚至上百个码元间隔,若采用传统时域均衡方法复杂度较高。单载波频域均衡(Single carrier frequency domain equalization, SC-FDE)技术采用分组传输和单抽头滤波器结构,大大降低了均衡处理的复杂度,在水声通信中的应用越来越受到关注<sup>[1-4]</sup>。信道估计是计算频域均衡器系数的关键环节,其估计精度直接影响着均衡效果。常用的信道估计方法有两种:一种是匹配滤波估计(Match filter, MF),该方法对观测噪声具有较强的宽容性,但估计精度较低;另一种是最小二乘法估计(Least square, LS),它是最小均方误差准则下的最优估计,但在低信噪比条件下估计性能较差。提升低信噪比下的信道估计精度成为改善SC-FDE性能的关键问题。

近年来,基于压缩感知(Compressive sensing, CS)的稀疏信道估计方法受到广泛关注。CS理论指出:如果信号在某个域上是稀疏的,则它可通过少量投影值就能大概率重构出该稀疏信号<sup>[5]</sup>。射线理论和大量实验均表明水声信道通常为多径稀疏信道,信道有效抽头(权值相对较大的抽头)分簇且数目较少,其他大部分抽头近似为零<sup>[6]</sup>。文献[7-8]结果表明:利用CS方法估计稀疏信道比传统估计方法具有更优的性能。实际中观测信号存在噪声干扰,利用含噪观测信号进行CS信道估计算法主要有dant-zig法、约束下极小化l1范数法以及基追踪降噪法(Basis pursuit de-noising, BPDN)等<sup>[9]</sup>。文献[10]通过对比指出,BPDN稀疏信道估计结果具有全局最优解,且具有良好的鲁棒性,适用于实时水声稀疏信道估计。目前对BPDN估计性能的研究主要集中在构建观测矩阵及优化重构算法上<sup>[9-14]</sup>。虽然BPDN算法考虑到了观测噪声的影响,但是当

信噪比较低时估计性能较差,无法满足信道均衡的要求。

当水下固定节点间通信时,在水声环境平稳的情况下水声信道可以视为相干多途信道,相干时间可以达到几秒甚至几十秒,远大于信号的多径延迟<sup>[15]</sup>,此时可通过增加信道估计次数来提高信道估计精度。本文首先研究了接收信噪比对BPDN稀疏信道估计性能的影响,结果验证了在低信噪比条件下BPDN算法对稀疏信道有效抽头估计仍保持着较高的重构概率和估计精度,进而提出了应用在SC-FDE系统中的改进BPDN估计方法。该方法利用延拓循环前缀(Cyclic prefix, CP)作为导频信号进行信道估计,将多次估计结果累积平均,然后判决提取有效多径抽头,提高了低信噪比下稀疏信道估计精度。由于利用SC-FDE固有的CP作为导频信号,并适当选取延拓次数,从而尽可能地减小了导频长度对频带利用率的影响。文中对改进BPDN算法的信道估计性能和误比特性能进行了分析,并与MF、LS、BPDN等方法进行了比较,验证了改进BPDN算法的性能优势。

## 2 系统模型

### 2.1 单载波频域均衡原理

SC-FDE系统结构如图1所示,发射端数据首先经串并转换后进行调制,调制数据块与导频块分别在前面添加循环前缀CP后组成发射数据帧,数据帧结构如图2所示。导频信号用于信道估计,CP既用于防止块间多途干扰,又能使接收信号满足循环卷积形式以实现频域均衡。数据帧经过水声信道后传输至接收端,接收端删除CP后,将数据帧通过FFT变换到频域,利用导频进行信道估计,然后对数据块进行频域均衡,将均衡后结果再经过IFFT得到时域信号,经解调、并串转换等处理最终得到发送数据的估计。

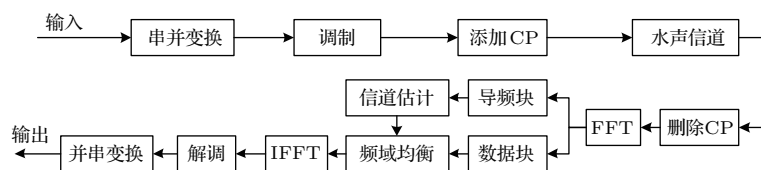


图1 SC-FDE系统组成框图

Fig. 1 The block diagram of SC-FDE system

CP	导频块	CP	数据块	CP
----	-----	----	-----	----

图2 SC-FDE系统数据帧结构

Fig.2 The data frame structure of SC-FDE system

发射端数据经串并转换后分块传输,每帧中数据块的长度为 $N$ ,单帧数据块可以表示为

$$\mathbf{x} = [x(0), x(1), \dots, x(N-1)]. \quad (1)$$

假定单帧数据长度内信道是恒定的,信道冲激响应函数可以表示为

$$\mathbf{h} = [h(0), h(1), \dots, h(L-1)], \quad (2)$$

式(2)中, $L$ 为信道长度。为了消除数据块间干扰,需在数据块前端插入长度大于 $L$ 的循环前缀CP。在接收端接收数据帧舍弃CP后,接收信号向量可以表示为

$$\mathbf{y} = \mathbf{M}\mathbf{x} + \mathbf{n}, \quad (3)$$

式(3)中, $\mathbf{y} = [y(0), y(1), \dots, y(n-1)]$ 为 $N$ 维接收信号, $\mathbf{n}$ 为 $N$ 维噪声向量, $\mathbf{M}$ 为信道冲激响应 $\mathbf{h}$ 构成的 $N \times N$ 维信道矩阵。

利用线性频域均衡器,采用最小均方误差(MMSE)均衡算法<sup>[2]</sup>,得到频域均衡后的信号:

$$Z_k = W_k Y_k + N_k, \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (4)$$

式(4)中, $W_k$ 为频域均衡器系数, $Y_k$ 为频域接收信号, $Z_k$ 为均衡后的频域信号。MMSE均衡器系数为

$$W_k = \frac{H_k^*}{1/\text{SNR} + |H_k|^2}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (5)$$

其中, $H$ 表示为 $\mathbf{h}$ 的 $N$ 点FFT的频域数值,SNR表示接收信噪比。

## 2.2 采用SpaRSA重构算法的BPDN原理

信道冲激响应 $\mathbf{h}$ 用于计算频域均衡器系数,对其精确估计是SC-FDE系统的关键。根据CS理论,公式(3)可以重新表示为

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{h} + \mathbf{n}, \quad (6)$$

其中, $\mathbf{X}$ 为观测矩阵。利用含噪观测值 $\mathbf{y}$ 来重构稀疏信道 $\mathbf{h}$ 可归纳为如下优化问题:

$$\min \|\mathbf{h}\|_0, \quad \text{s.t.} \quad \|\mathbf{y} - \mathbf{X}\mathbf{h}\|_2 \leq \varepsilon, \quad (7)$$

其中, $\|\mathbf{h}\|_0$ 为信道冲激响应的 $l_0$ 范数即稀疏度。该问题为非确定性多项式NP难问题,现有的优化算

法难以求解。文献[12]已经证明,在一定条件下可将该问题转化为求解如下问题:

$$\min \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{X}\mathbf{h}\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{h}\|_1, \quad (8)$$

式(8)中, $\lambda$ 称做正则因子,用于平衡估计结果的精确度和运算复杂度,该问题可由BPDN方法求解。BPDN估计的关键在于观测矩阵 $\mathbf{X}$ 的构建和重构算法的选择。当观测矩阵 $\mathbf{X}$ 满足限制等距条件(Restricted isometry property, RIP)时,稀疏信号能够大概率由观测值精确重构<sup>[14]</sup>。BPDN重构有l1\_ls、SpaRSA、YALL1等多种算法,文献[15]结果表明,SpaRSA算法具有较低的复杂度和高重构精度,适用于实时水声信道估计。SpaRSA算法是将BPDN优化问题转变成次优化问题,利用收缩阈值函数求解这个次优化问题<sup>[16]</sup>。公式(8)可重写为

$$\min_{\mathbf{h}} F(\mathbf{h}) = f(\mathbf{h}) + \tau c(\mathbf{h}), \quad (9)$$

其中, $f(\mathbf{h}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{X}\mathbf{h}\|_2^2$ ,  $c(\mathbf{h}) = \|\mathbf{h}\|_1$ 。公式(9)可通过迭代运算求解出一个估值序列 $\mathbf{h}$ ,迭代估值为

$$h^{(i+1)} = \arg \min_{\mathbf{h}} \frac{1}{2} \|\mathbf{h} - u^{(i)}\|_2^2 + \frac{\tau}{\alpha_i} c(\mathbf{h}), \quad (10)$$

其中, $u^{(i)} = h^{(i)} - \frac{1}{\alpha_i} \nabla f(h^{(i)})$ 。因为 $c(\mathbf{h}) = \|\mathbf{h}\|_1$ 具有可分离形式,它可以通过闭合解直接求得

$$\begin{aligned} h^{(i+1)} &= \arg \min_{\mathbf{h}} \frac{(h - u^{(i)})^2}{2} + \frac{\tau |h|}{\alpha_i} \\ &= \text{soft}\left(u_k^{(i)}, \frac{\tau}{\alpha_i}\right), \end{aligned} \quad (11)$$

其中, $\text{soft}(u, \alpha) = \text{sign}(u) \max\{|u| - \alpha, 0\}$ ,它被称为软阈值函数。可以看出,利用软阈值函数求解次优化问题仅涉及简单比较和取符号运算,没有复杂的矩阵运算,因此其运算复杂度较低,同时具有较高的重构概率和估计精度。

## 2.3 BPDN稀疏信道估计性能分析

当信噪比较低时,BPDN方法对稀疏信道的估计精度也随之降低,但对信道有效抽头的估计具有较高的稳定性,表现在对有效抽头的延迟位置和权值具有较高的估计精度。利用BPDN方法对模拟水声信道冲激响应进行估计,如图3所示,其中时延为关于码元周期的相对值,可以看出该水声信道是一个簇稀疏类型的多径信道。观测矩阵采用伪随机噪声(Pseudo noise, PN)序列构造的Toeplitz结构矩阵,能够实现重构稀疏信道<sup>[8]</sup>。图3分别给

出  $\text{SNR} = 10 \text{ dB}$ 、 $\text{SNR} = 0 \text{ dB}$ 、 $\text{SNR} = -5 \text{ dB}$  时的信道估计结果，可以看出，当  $\text{SNR} = 10 \text{ dB}$  时 BPDN 重构精度很高，随着信噪比降低，重构精度不断下降，在零值抽头位置上出现伪抽头，当

$\text{SNR} = -5 \text{ dB}$  时，估计性能严重恶化，伪抽头甚至湮没了正确抽头。通过对比发现，当信噪比较低时 BPDN 算法仍能够大概率估计出有效抽头，表现出较强的稳定性。

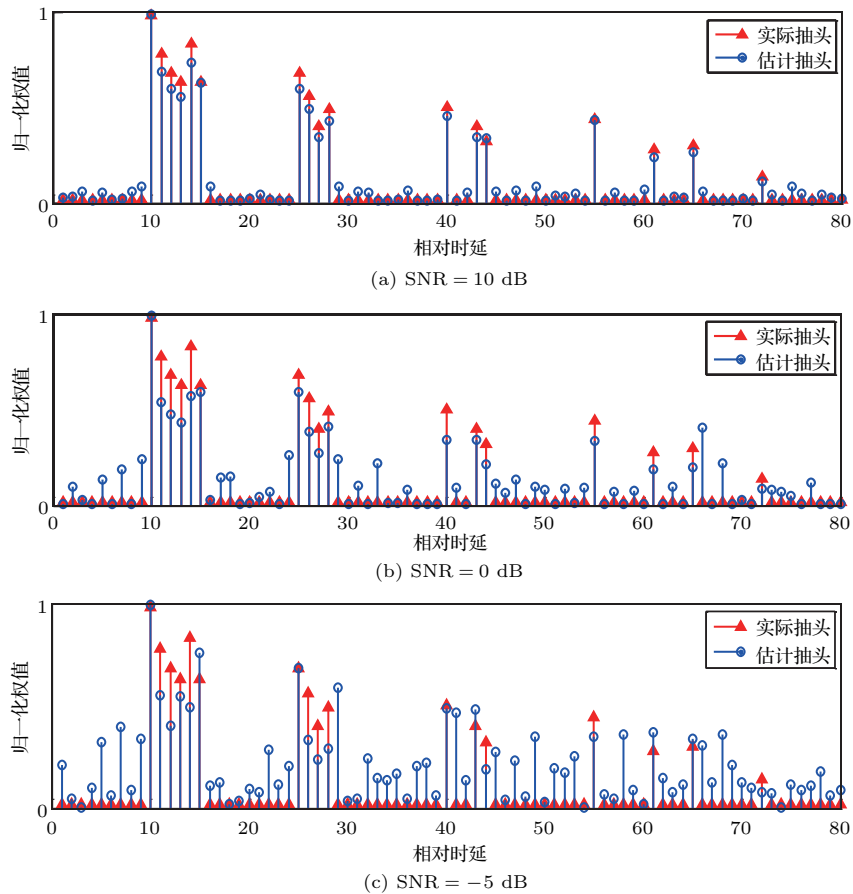


图3 不同信噪比下 BPDN 估计稀疏信道结果对比

Fig. 3 Comparison of BPDN channel estimation results at different SNRs

为了验证 BPDN 算法对信道有效抽头估计的稳定性，本文采用了正确估计概率和估计均方误差两项指标来衡量。正确估计概率是指正确估计信道路径延迟的概率，表示对多径延迟的分辨能力。通过蒙特卡洛仿真分析不同信噪比下信道有效抽头的正确估计概率，仿真稀疏信道模型长度为 100，有效抽头个数取 20 条，其归一化权值系数在 0.3 与 1 之间随机分布，权值估计容限误差为 10%，正确估计概率如图 4 所示。可以看出，随着信噪比降低，BPDN 对有效抽头的正确估计概率也随之下落，当信噪比为 0 dB 时，正确估计概率为 60%，可见当低信噪比时对有效抽头仍保持着较高的重构概率。

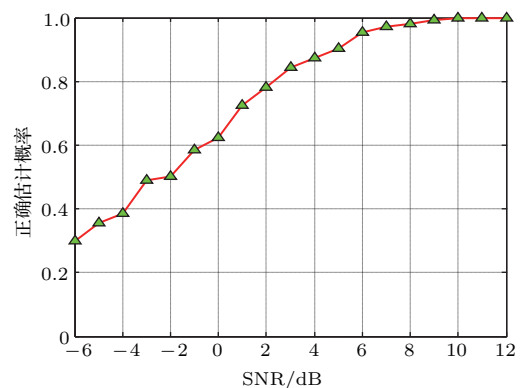


图4 BPDN 估计多径有效抽头的正确估计概率

Fig. 4 Reconstruction probability of effective channel tap under different SNRs

估计均方误差MSE表示信道实际冲激响应  $h(i)$  与估计值  $\hat{h}(i)$  之间的均方差,其定义为

$$MSE = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^N \|h(i) - \hat{h}(i)\|_2^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^N \|h(i)\|_2^2}}. \quad (12)$$

分别计算不同信噪比下对全部抽头估计的MSE以及对有效抽头估计的MSE,如图5所示。可见随着信噪比不断下降,MSE不断增大,当信噪比低至  $-2$  dB时,全部抽头估计的MSE已经大于1,而有效抽头估计的MSE为0.2,对有效抽头估计精度明显较高。综上可知,BPDN算法在低信噪比时对信道的估计精度下降,但是对信道有效抽头的估计保持着较高的多径延迟分辨能力和权值估计精度,具有较高的稳定性。

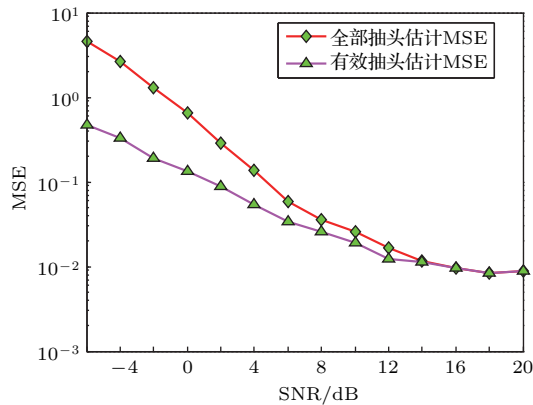


图5 不同信噪比下信道估计的MSE性能

Fig. 5 The MSE of channel estimation under different SNRs

### 3 改进BPDN算法原理

假定通信中收发双方保持静止,水声信道在一定时间内视为时不变相干多途信道,此时可通过适当增加信道估计次数来提高信道估计精度。基于BPDN方法对稀疏信道有效抽头估计具有稳定性,本文提出了在SC-FDE系统中应用的改进BPDN信道估计算法,用于提高低信噪比下信道估计精度。改进BPDN算法方案如下:

步骤一: SC-FDE的数据帧结构如图6所示,系统采用自相关性良好的PN序列作为CP,PN序列

长度需大于信道长度。导频块采用与CP相同的PN序列多次延拓组成。

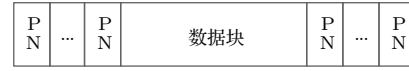


图6 采用改进BPDN算法的SC-FDE的数据帧格式

Fig. 6 The data frame format of SC-FDE with improved BPDN algorithm

利用延拓PN序列作为导频对稀疏信道分别进行估计,每段PN序列与信道冲激响应的线性卷积可以等效为循环卷积的形式<sup>[17]</sup>,公式(6)可以表示为如下的分段卷积的形式:

$$[y_2, y_3, \dots, y_n] = \mathbf{X} \otimes [h_2, h_3, \dots, h_n], \quad 1 < n \leq M + 1, \quad (13)$$

式(13)中,  $M > 0$  为导频块中PN序列的延拓次数,每段信道观测向量  $y_n$  的长度取与信道长度相同均为  $N$ ,观测矩阵  $\mathbf{X}$  可以表示为

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} m(0) & m(N-1) & \dots & m(1) \\ m(1) & m(0) & \vdots & m(2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m(N-1) & m(N-2) & \dots & m(0) \end{bmatrix}, \quad (14)$$

其中,PN序列  $m(n) : n = 0, 1, \dots, N - 1$ 。文献[8]已证明,观测矩阵  $\mathbf{X}$  具有最优RIP特性,能够实现稀疏信号重构。

步骤二: 假定接收端已实现精确同步,取导频块以及CP共  $M + 1$  段数据分别采用BPDN算法进行稀疏信道估计,得到信道估计值  $h_n, 1 \leq n \leq M + 1$ ,然后对  $h_n$  求均值:

$$h_{\text{est}} = \frac{1}{M + 1} \sum_{n=1}^{M+1} h_n. \quad (15)$$

由于各段估计  $h_n$  在多径抽头位置上具有稳定性,而在零值抽头位置上出现的伪抽头是随机分布的,通过累积平均的方法可以提高  $h_{\text{est}}$  中多径抽头的峰值比。为了减小延拓探测信号对频带利用率的影响,应选择合适的延拓次数,在估计精度与频带利用率之间取得平衡。

步骤三: 统计平均值  $h_{\text{est}}$  中仍具有大量伪抽头,可以通过门限判决的方法提取有效抽头,对伪抽头采用置零的方法,提高信道估计精度。采用这种方法可能会损失部分小能量的抽头值,但能够提取

出起主要作用的大能量抽头,且有效降低了伪抽头造成的估计误差,提高了信道估计精度。

#### 4 算法仿真

本节通过仿真对改进BPDN算法的估计性能进行分析,并对SC-FDE系统中采用MF、LS、BPDN以及改进BPDN信道估计方法对误比特性能的影响进行比较。仿真水声信道由BELLHOP信道仿真软件生成,信道为等温层,水深50 m,收发阵元深度均为20 m,传输距离为5 km,仿真得到的信道冲激响应如图7所示。

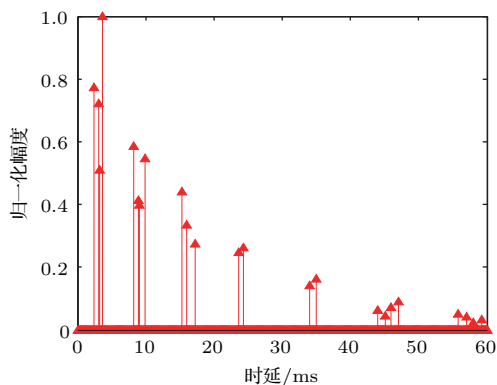


图7 仿真的信道冲激响应

Fig. 7 Simulation of channel impulse response

仿真数据帧结构如图6所示,信号载波频率为2 kHz,采样率为6 kHz,PN序列为511位的 $m$ 序列,码元速率为1 kbps,数据调制方式为QPSK,噪声为加性高斯白噪声。假设信道冲激响应保持平稳,且接收机已实现精确同步,仿真分析不同的PN序列延拓累积次数对信道估计的影响,如图8所示。可以看出,随着延拓累积次数不断增加,信道估计性能随之提高,但提高的效果越来越不明显。当累积次数超过4次时,MSE曲线已经很接近。从信道相干时间、频带利用率以及改善估计性能等方面权衡,PN序列延拓次数不宜过长,取3~4次为佳。

下面通过蒙特卡洛仿真,比较MF、LS、BPDN和改进BPDN的稀疏信道估计性能和误比特性能。仿真中CP的延拓次数为4次。

图9比较了各种信道估计方法的MSE性能,可见改进BPDN算法的MSE性能始终优于其他信道估计方法。MF估计方法的稳健性较好,但估计精度较低;LS估计在高信噪比时估计性能良好,但低

信噪比时估计性能严重退化。BPDN估计性能优于MF估计和LS估计,但在低信噪比时估计性能也明显退化。而改进BPDN估计方法具有最优的估计性能,且在低信噪比时估计性能优势明显。

图10比较了SC-FDE系统中采用各种信道估

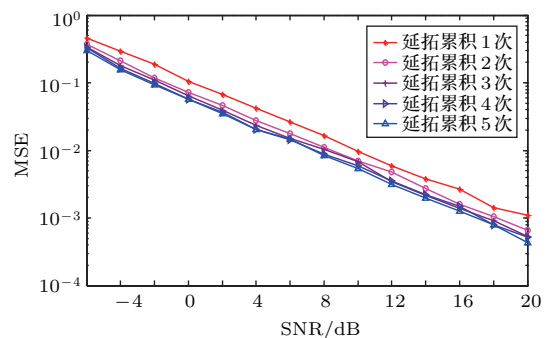


图8 不同PN延拓累积次数时BPDN估计MSE曲线  
Fig. 8 MSE curve of BPDN estimation for different PN extension cumulative times

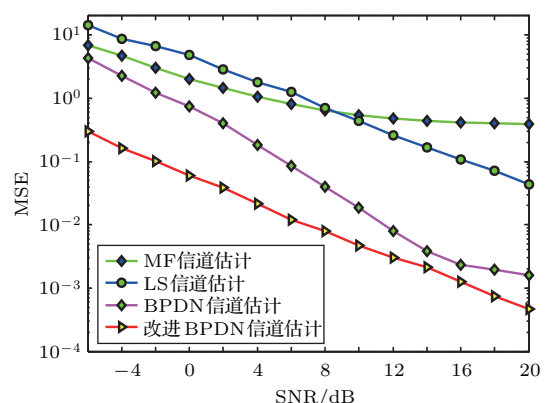


图9 各种信道估计方法MSE性能  
Fig. 9 MSE of various channel estimation algorithms

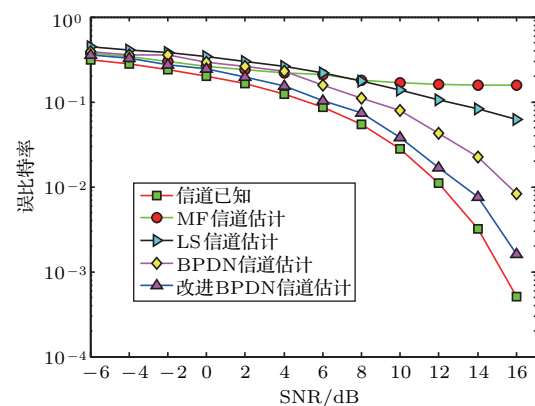


图10 各种信道估计方法的误比特率  
Fig. 10 BER for various channel estimation algorithms

计方法的误比特性能,可见改进BPDN算法的误比特性能明显优于其他算法,与信道已知时的误比特率更加接近。当误码率为 $10^{-1}$ 时,BPDN方法的接收信噪比约为9 dB,而改进BPDN方法的接收信噪比为6 dB,比较二者的误比特率曲线可见,改进BPDN方法可以提高约3 dB的接收信噪比增益。

## 5 结论

本文提出了一种水下固定节点之间在平稳相干多途信道条件下SC-FDE中改进的BPDN信道估计方法。该方法基于BPDN算法对信道有效抽头估计具有较高的重构概率和估计精度,采用延拓CP作为导频,对信道进行多次估计,然后将多次估计结果累积平均,再进行判决门限提取有效抽头,提高了低信噪比下稀疏信道估计精度。仿真结果表明,改进BPDN算法有效改善了低信噪比下稀疏信道的估计精度,显著提升了低信噪比下SC-FDE的误比特性能。本方法仅限于在静态平稳水声信道中应用,在时变信道下提高估计精度方法需要进一步研究。

## 参 考 文 献

- [1] PANCALDI F, VITETTA G M, KALBASI R, et al. Single-carrier frequency domain equalization[J]. *Signal Processing Magazine, IEEE*, 2008, 25(5): 37–56.
- [2] FALCONER D, ARIYAVISITAKUL S L, BENYAMIN-SEEYAR A, et al. Frequency domain equalization for single-carrier broadband wireless systems[J]. *IEEE Communications Magazine*, 2002, 40(4): 58–66.
- [3] 郭瑜晖, 孙海信, 程恩, 等. 水声系统单载波频域均衡方法比较[J]. *厦门大学学报: 自然科学版*, 2012, 51(5): 849–853.  
GUO Yuhui, SUN Haixin, CHENG En, et al. The method comparison of SC-FDE in underwater acoustic system[J]. *Journal of Xiamen University: Natural Science*, 2012, 51(5): 849–853.
- [4] 何成兵, 黄建国, 张涛, 等. 单载波频域均衡高速水声通信仿真研究[J]. *系统仿真学报*, 2007, 19(23): 5455–5458.  
HE Chengbing, HUANG Jianguo, ZHANG Tao, et al. High-speed underwater acoustic communication based on single carrier with frequency domain equalization[J]. *Journal of System Simulation*, 2007, 19(23): 5455–5458.
- [5] BAJWA W U, HAUPT J, RAZ G, et al. Compressed channel sensing[C]//*Information Sciences and Systems*, 2008. Ciss 2008. Conference on. IEEE, 2008: 5–10.
- [6] 许天增. 水声数字通信[M]. 北京: 海洋出版社, 2010: 81–92.
- [7] 尹艳玲, 乔钢, 刘淞佐, 等. 基于基追踪去噪的水声正交频分复用稀疏信道估计[J]. *物理学报*, 2015, 64(6): 227–234.  
YIN Yanling, QIAO Gang, LIU Songzuo, et al. Sparse channel estimation of underwater acoustic orthogonal frequency division multiplexing based on basis pursuit denoising[J]. *Acta Physica Sinica*, 2015, 64(6): 227–234.
- [8] 孟庆微, 黄建国, 何成兵, 等. 采用时域测量矩阵的压缩感知稀疏信道估计方法[J]. *西安交通大学学报*, 2012, 46(8): 94–99.  
MENG Qingwei, HUANG Jianguo, HE Chengbing, et al. An compressed sensing estimation method for sparse channels using time domain measurement matrix[J]. *Journal of Xi'an Jiaotong University*, 2012, 46(8): 94–99.
- [9] 邓军. 基于凸优化的压缩感知信号恢复算法研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2011.
- [10] HUANG J, BERGER C R, ZHOU S, et al. Comparison of basis pursuit algorithms for sparse channel estimation in underwater acoustic OFDM[C]. *OCEANS 2010 IEEE - Sydney*, Sydney, NSW, 2010: 1–6.
- [11] SUBRAMANIAN S. Compressed sensing for sparse underwater channel estimation: Some practical considerations[J]. *Mathematics*, 2010.
- [12] BERGER C R, ZHOU S, PREISIG J C, et al. Sparse channel estimation for multicarrier underwater acoustic communication: From subspace methods to compressed sensing[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2010, 58(3): 1708–1721.
- [13] CHEN S S, DONOHO D L, SAUNDERS M A. Atomic decomposition by basis pursuit[J]. *SIAM Review*, 2001, 43(1): 129–159.
- [14] CANDÈS E J. The restricted isometry property and its implications for compressed sensing[J]. *Comptes Rendus Mathematique*, 2008, 346(9): 589–592.
- [15] 惠俊英, 生雪莉. 水下声信道[M]. 第2版. 北京: 国防工业出版社, 2007.
- [16] FIGUEIREDO M A T, NOWAK R D, WRIGHT S J. Gradient projection for sparse reconstruction: Application to compressed sensing and other inverse problems[J]. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 2007, 1(4): 586–597.
- [17] 焦现军, 张磊, 项海格. 单载波频域均衡系统中的PN信道估计算法[J]. *北京大学学报: 自然科学版*, 2007, 43(1): 103–108.  
JIAO Xianjun, ZHANG Lei, XIANG Haige. PN based channel estimation in SC-FDE system[J]. *Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Pekinensis: Natural Science*, 2007, 43(1): 103–108.