

◇ 研究报告 ◇

截断阶梯 Legendre 函数加权阵列恒定束宽 波束特性分析*

冯雪磊[†] 魏柠阳 陈南若 李晓伟

(中国船舶科学研究中心 深海载人装备国家重点实验室 无锡 214082)

摘要 连续 Legendre 函数加权的恒定束宽换能器 (CBT) 阵列可以在一定频率范围内采用与频率无关的简单阵元权重实现恒定束宽的波束特性。然而常规 CBT 阵列需要为每个阵元配置相应的阵元权重, 当阵元数量较大时会增加复杂度。该文分析了截断阶梯 Legendre 函数加权的面阵列, 包括球面阵、柱面阵和平面阵, 并且分别分析了 Legendre 函数球面加权方法和 Legendre 函数柱面加权方法应用于上述阵列的性能。结果表明, 截断阶梯 Legendre 函数加权对波束方向的影响可以忽略, 而主要影响波束宽度。对于面阵列, 当采样阶梯不大于 3 dB, 截断点不大于 -21 dB 时, 截断阶梯 Legendre 函数加权能很好近似连续 Legendre 函数加权。因此截断阶梯 Legendre 函数加权可以在保证 CBT 阵列性能的前提下有效减少阵元加权系数的数量。

关键词 恒定束宽, 波束形成, 阶梯 Legendre 函数加权, 截断 Legendre 函数加权

中图法分类号: TB565

文献标识码: A

文章编号: 1000-310X(2018)03-0419-08

DOI: 10.11684/j.issn.1000-310X.2018.03.016

Analysis of constant beamwidth array using stepped and truncated Legendre shading

FENG Xuelei WEI Ningyang CHEN Nanruo LI Xiaowei

(State Key Laboratory of Deep-Sea Manned Vehicles, China Ship Scientific Research Center, Wuxi 214082, China)

Abstract A conventional constant beamwidth transducer CBT array using continuous Legendre shading achieves frequency-independent beam pattern at a particular frequency band using frequency-independent element weightings. However, it is necessary to assign individual weighting to every array element, and the complexity increases significantly while the element number is larger. Thus, the stepped and truncated Legendre shading is applied to various two-dimensional arrays, including spherical array, cylindrical array and planar array. Both spherical and cylindrical Legendre shading methods are analyzed. The results indicate that the influence of stepped and truncated Legendre shading on the beam direction is negligible, and the stepped and truncated Legendre shading mainly affects the beamwidth. In the cases of the two-dimensional arrays, the stepped and truncated Legendre shading achieves good approximation to the conventional continuous Legendre shading when the step is not greater than 3 dB and the truncation is not greater than -21 dB. It is concluded that the stepped and truncated Legendre shading reduces the number of element weightings effectively.

Key words Constant beamwidth, Beamforming method, Stepped Legendre-function shading, Truncated Legendre-function shading

2017-08-29 收稿; 2017-10-06 定稿

*国家自然科学基金项目 (11772304)

作者简介: 冯雪磊 (1989-), 男, 江苏无锡人, 博士, 工程师, 研究方向: 声学换能器。

[†] 通讯作者 E-mail: xlfeng@hotmail.com

1 引言

不失真地处理宽带水声信号有利于提高水声设备的性能,这就要求声纳和水声设备的换能器阵列在特定频带内具有恒定束宽的特性。目前已经出现多种基于信号处理理论的恒定束宽的波束形成方法^[1-4],这些方法通常具有较好的波束形成效果,但是其阵元权重与频率有关,算法较为复杂,增加了计算复杂度。而由美国海军研究实验室提出的恒定束宽换能器(Constant beamwidth transducer, CBT)阵列^[5-7]则采用与频率无关的简单阵元权重,实现恒定束宽,并且具有较小的旁瓣,能抑制来自其他方向的干扰。

国内外已开展了很多关于CBT的研究^[8-10],这些研究通常采用连续Legendre函数加权,需要为每个阵元赋予单独的权重。Keele^[11]提出了实用的圆弧形CBT阵列原型样机并进行了实验验证,在CBT阵列样机中,Keele提出的截断阶梯Legendre函数加权方法简化了阵元权重,降低了计算复杂程度,而波束仍基本保持CBT的性能。本文将阶梯Legendre函数加权运用于声纳面阵列,计算其波束特性,并与连续Legendre函数加权进行比较。

2 截断阶梯Legendre函数加权基本理论

2.1 CBT面阵列

对于球冠形或者圆弧形声源,若其表面法向速度 $u(\theta)$ 满足

$$u(\theta) = \begin{cases} u_0 P_\nu(\cos\theta), & \theta \leq \theta_0, \\ 0, & \theta > \theta_0, \end{cases} \quad (1)$$

那么在高于某一频率时,其远场声压 $p(r, \theta)$ 分布可以近似为^[6,12]

$$p(r, \theta) \approx \begin{cases} u_0 \rho c a P_\nu(\cos\theta) \frac{e^{jk(r-a)}}{r}, & \theta \leq \theta_0, \\ 0, & \theta > \theta_0, \end{cases} \quad (2)$$

其中, u_0 为声源信号幅度, ρ 为密度, c 为声速, k 为波数, r 为远场任意一点到球冠形或者圆弧形声源的球心或圆心的距离, a 为球冠形或者圆弧形声源的半径, $j = \sqrt{-1}$ 。 θ 为极角,以球冠形或者圆弧形声源的对称轴方向为 $\theta = 0$ 方向, θ_0 为 ν 阶Legendre函数 $P_\nu(\cos\theta)$ 的第一个零点,且其中阶数 $\nu(\nu > 0)$

不必为整数。由式(2)可见,波数 k 与极角 θ 解耦,因而波束的形状与频率无关。

考虑三种面阵列,即球面阵、柱面阵和平面阵。不失一般性,不妨假定阵列的曲面方程分别为球面阵 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$;柱面阵 $x^2 + y^2 = a^2, |z| \leq H/2$,其中 H 为柱面阵的高;平面阵 $z = a, |x| \leq L_x/2, |y| \leq L_y/2$,其中 L_x 和 L_y 为平面阵沿 x 方向和 y 方向的长度。极角原点坐标为 $(0, 0, 0)$, $\theta = 0$ 方向为 $(0, 0, 1)$ 。

Legendre函数球面加权方法的原型为球面阵,如图1(a)所示,其中代表阵元的黑色圆点越大,表示阵元权重越大。对于柱面阵和平面阵,可以采用延时的方法^[13]实现Legendre函数球面加权。在Legendre函数球面加权方法中,对于三种形状的阵列,极角 θ 为向量 $(x, y, \sqrt{a^2 - x^2 - y^2})$ 与 $(0, 0, 1)$ 的夹角,因此阵元权重 w_s 为

$$w_s = \begin{cases} P_\nu\left(\frac{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}{a}\right), & \theta \leq \theta_0, \\ 0, & \theta > \theta_0, \end{cases} \quad (3)$$

其中, $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}{a}\right)$,且对于 w_s 的非零项需满足 $x^2 + y^2 \leq a^2$ 。不难得到对于三种形状的阵列,阵元延时为

$$\Delta t_s = \begin{cases} 0, & \text{球面阵,} \\ \frac{z - \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}{c}, & \text{柱面阵,} \\ \frac{a - \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}{c}, & \text{平面阵.} \end{cases} \quad (4)$$

Legendre函数柱面加权方法的原型为柱面阵,如图1(b)所示,其中代表阵元的黑色圆点越大,表示阵元权重越大。对于球面阵和平面阵,可以采用延时的方法^[13]实现Legendre函数柱面加权。在Legendre函数柱面加权方法中,对于三种形状的阵列,极角 θ 为向量 $(x, 0, \sqrt{a^2 - x^2})$ 与 $(0, 0, 1)$ 的夹角,因此阵元权重 w_c 为

$$w_c = \begin{cases} P_\nu\left(\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}\right), & \theta \leq \theta_0, \\ 0, & \theta > \theta_0, \end{cases} \quad (5)$$

其中, $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}\right)$,且对于 w_c 的非零项需满足 $x^2 \leq a^2$ 。不难得到对于三种形状的阵列,阵

元延时为

$$\Delta t_c = \begin{cases} \frac{z - \sqrt{a^2 - x^2}}{c}, & \text{球面阵,} \\ 0, & \text{柱面阵,} \\ \frac{a - \sqrt{a^2 - x^2}}{c}, & \text{平面阵.} \end{cases} \quad (6)$$

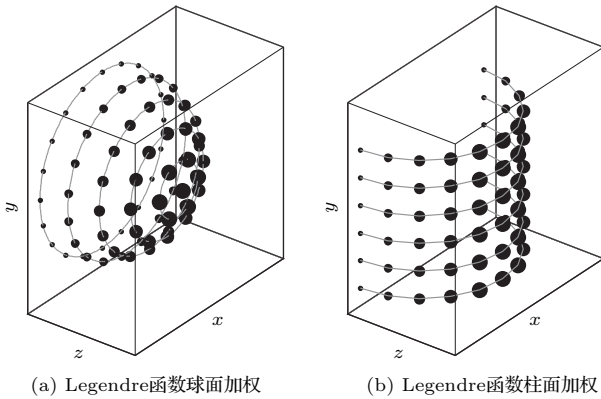


图1 Legendre 函数加权
Fig. 1 Legendre shading

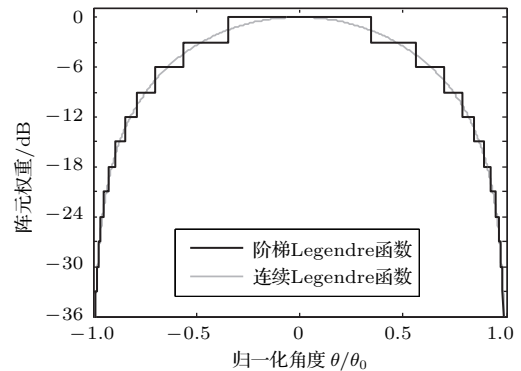
2.2 截断阶梯 Legendre 函数加权方法

对于阵列中每个阵元，需要根据其对应的极角确定其权重和信号衰减量。连续 Legendre 函数值从1连续变化到0，这样只要阵元对应的极角不同，就需要采用不同的权重，随着阵元数量的增加，加权系数的数量也相应增加。可以采用阶梯 Legendre 函数加权方法减少阵元权重的数量，即首先确定阶梯参数STEP(单位 dB)，然后计算连续 Legendre 函数值，若连续 Legendre 函数值位于区间 $(nSTEP - STEP/2, nSTEP + STEP/2]$ (n 为整数) 内，则取阶梯 Legendre 函数值为 $nSTEP$ 。如图2(a)所示为STEP = 3 dB的阶梯 Legendre 函数。显然，采用阶梯 Legendre 函数加权可以减少阵元权重的数量，降低复杂度，特别当阵元数量较大时，阶梯 Legendre 函数减少的阵元权重相当可观。

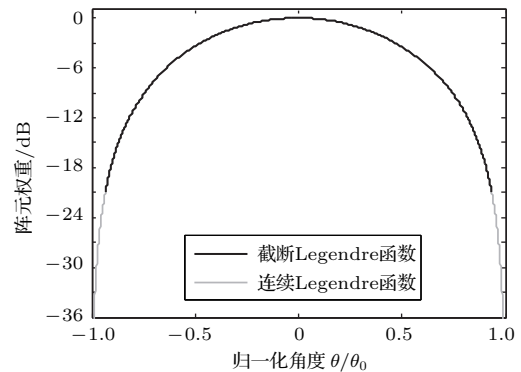
注意到连续 Legendre 函数中当极角 θ 接近于 θ_0 时，权重趋向于0，即靠近波束边缘的阵元权重很小。这样可以设定截断参数TRUNC，当阵元权重小于TRUNC时，设定其权重为0，即关闭其所在的通道。如图2(b)所示即为截断 Legendre 函数加权方法，这里取TRUNC = -21 dB。

可以将阶梯 Legendre 函数和截断 Legendre 函数结合起来，构建截断阶梯 Legendre 函数。如图2(c)所示为STEP = 3 dB, TRUNC = -21 dB

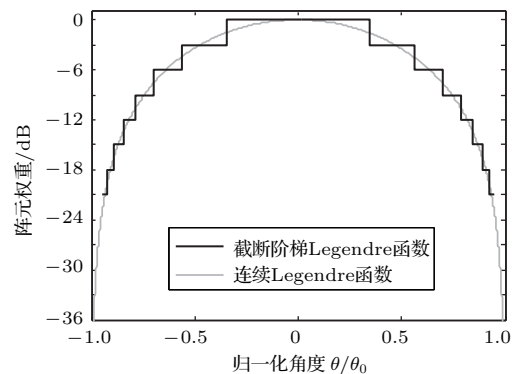
的截断阶梯 Legendre 函数。这样阵元权重可以进一步减少，图2(c)中只有8个阵元权重，研究表明采用这一权重的圆弧形 CBT 阵列与连续加权 CBT 阵列相比，性能相似^[11]。值得注意的是，截断阶梯 Legendre 函数加权方法中，大多数阵元的权重不小于 -6 dB，而其余阵元至少衰减9 dB。不难统计得到，Legendre 函数球面加权方法中0 dB、-3 dB和-6 dB权重的阵元数量约为59.3%，Legendre 函数柱面加权方法中0 dB、-3 dB和-6 dB权重的阵元数量约为69.6%。



(a) 阶梯Legendre函数加权



(b) 截断Legendre函数加权



(c) 截断阶梯Legendre函数加权

图2 截断阶梯 Legendre 函数加权方法

Fig. 2 Stepped and truncated Legendre shading

3 截断阶梯 Legendre 函数加权计算设定

为了验证截断阶梯 Legendre 函数加权方法,对三种面阵列的几何参数进行设定。参照国外大型潜艇的声纳阵列^[14],设定球面阵和柱面阵的直径 D 均为 5.8 m,设定柱面阵的高 H 、平面阵沿 x 方向和 y 方向的长度 L_x 和 L_y 亦均为 5.8 m。设定阵元间距为 0.12 m,这样面阵列的阵元数量约为 200~500 个。另外需对环境参数进行设定,取海水密度 $\rho = 1024 \text{ kg/m}^3$,声速 $c = 1500 \text{ m/s}$ 。

为便于计算,取波束方向为 15° ,波束的 θ_0 为 24° ,这样不难由 Legendre 函数的性质计算得到波束的 -3 dB 宽度为 22.63° 。CBT 阵列的工作频率下限 f_L 可由经验公式^[10]计算得到 $f_L = K/(1.28h\theta_0)$,其中, h 为弦长,即 $h = 2a \sin \theta_0$, K 为系数,当频率单位为 Hz,角度单位为 $(^\circ)$ 时 $K = 1.09 \times 10^5$,这样不难得到 $f_L = 1504 \text{ Hz}$ 。由于面声纳阵列为离散的点阵,任意离散换能器基阵,当阵元间距相对较大时,便会出现栅瓣,由此可以确定阵列的工作频率上限 f_H 。根据阵列理论^[15-16],并且为了便于比较不同的阵列,上限频率 f_H 满足的条件统一取为阵元间距小于上限频率 f_H 对应波长的一半,这样不难得到 $f_H = 6250 \text{ Hz}$ 。为了保证阵列性能,取计算频率范围为 2~6 kHz,约为 1.5 倍频程。

另外在计算中假定阵元为完全相同的点源,并且计算趋向无穷远处的波束分布。采用 Keele 提出的公式近似 Legendre 函数

$$P_\nu(\cos \theta) \approx 1 + 0.066|x| - 1.8|x|^2 + 0.734|x|^3, \quad (7)$$

其中, $x = \theta/\theta_0$ 为归一化角度,且 $|x| \leq 1$ 。

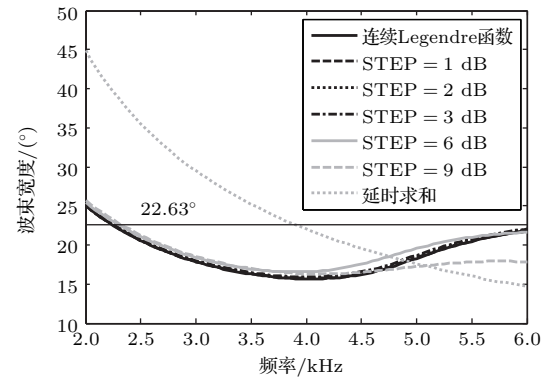
4 计算结果与分析

4.1 截断阶梯 Legendre 函数球面加权

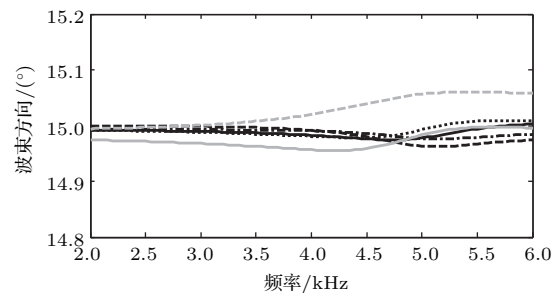
首先计算分析截断阶梯 Legendre 函数球面加权方法,即采用截断阶梯 Legendre 函数代替式(3)中的连续 Legendre 函数。考虑非延时阵列,根据式(4),即为球面阵。

阶梯 Legendre 函数加权球面的球面阵的波束特性如图 3 所示,注意图 3 中的加权函数未被截断,即 $\text{TRUNC} = -\infty$ 。由图 3 可见,STEP 越小,阶

梯 Legendre 函数加权与连续 Legendre 函数加权越接近。由图 3(a)可见,当 $\text{STEP} \leq 3 \text{ dB}$ 时,阶梯 Legendre 函数加权与连续 Legendre 函数加权的波束宽度已十分接近,即此时阶梯 Legendre 函数加权对连续 Legendre 函数加权有很好的近似。而由图 3(b)可见,阶梯 Legendre 函数几乎不会改变球面阵的波束方向,因此阶梯 Legendre 函数对球面阵的波束方向的影响可以忽略。



(a) 波束宽度



(b) 波束方向

图 3 阶梯 Legendre 函数加权非延时球面阵的波束特性
Fig. 3 Characteristics of the beam generated by the non-delayed spherical array using stepped Legendre shading

截断 Legendre 函数球面加权的球面阵的波束特性如图 4 所示,注意图 4 中的加权函数采用的是连续 Legendre 函数,即 $\text{STEP} = 0 \text{ dB}$ 。由图 4 可见,TRUNC 越小,截断 Legendre 函数加权与非截断 Legendre 函数加权越接近。由图 4(a)可见,当 $\text{TRUNC} \leq -21 \text{ dB}$ 时,截断 Legendre 函数加权与非截断 Legendre 函数加权的波束宽度已十分接近,即此时截断 Legendre 函数加权与非截断 Legendre 函数加权有很好的近似。对比图 4(a)和图 3(a)可见,截断 Legendre 函数对球面阵波束的影响比阶梯 Legendre 函数的影响大。由图 4(b)可见,截断 Legendre 函数同样几乎不会改变球面阵的波束方

向,因此截断 Legendre 函数对球面阵波束方向的影响也可以忽略。

综合图3和图4的分析结果,考虑到当STEP ≤ 3 dB、TRUNC ≤ -21 dB时,截断阶梯 Legendre 函数加权对波束的影响较小,因此取STEP = 3 dB、TRUNC = -21 dB构建截断阶梯 Legendre 函数,如图2(c)所示,并计算球面阵的波束,如图5所

示。由图5可见截断阶梯 Legendre 函数加权与连续 Legendre 函数加权的波束基本一致。相对而言,截断阶梯 Legendre 函数加权导致了一些旁瓣,如图5(d)所示,但是这些旁瓣均很小,其中最大旁瓣小于 -25 dB。因此,对于非延时球面阵,截断阶梯 Legendre 函数加权可以很好地近似连续 Legendre 函数加权。

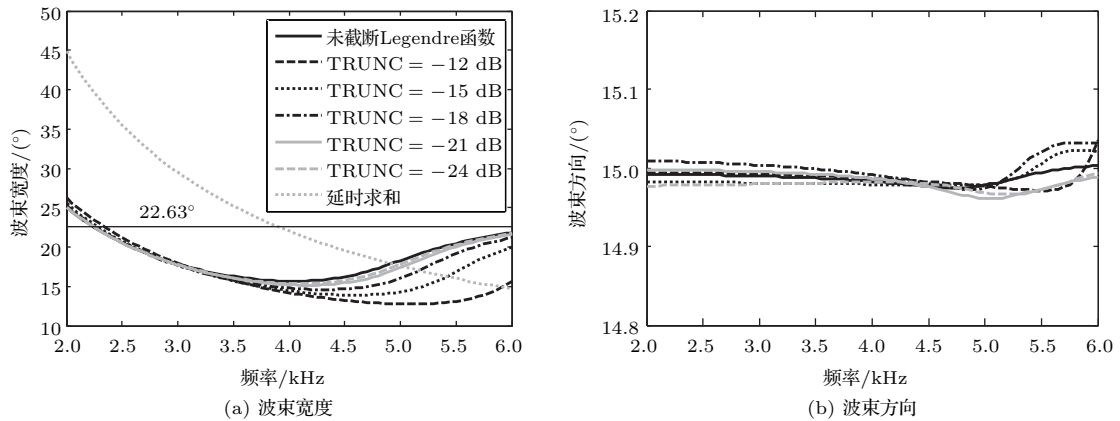


图4 截断 Legendre 函数加权非延时球面阵的波束特性

Fig. 4 Characteristics of the beam generated by the non-delayed spherical array using truncated Legendre shading

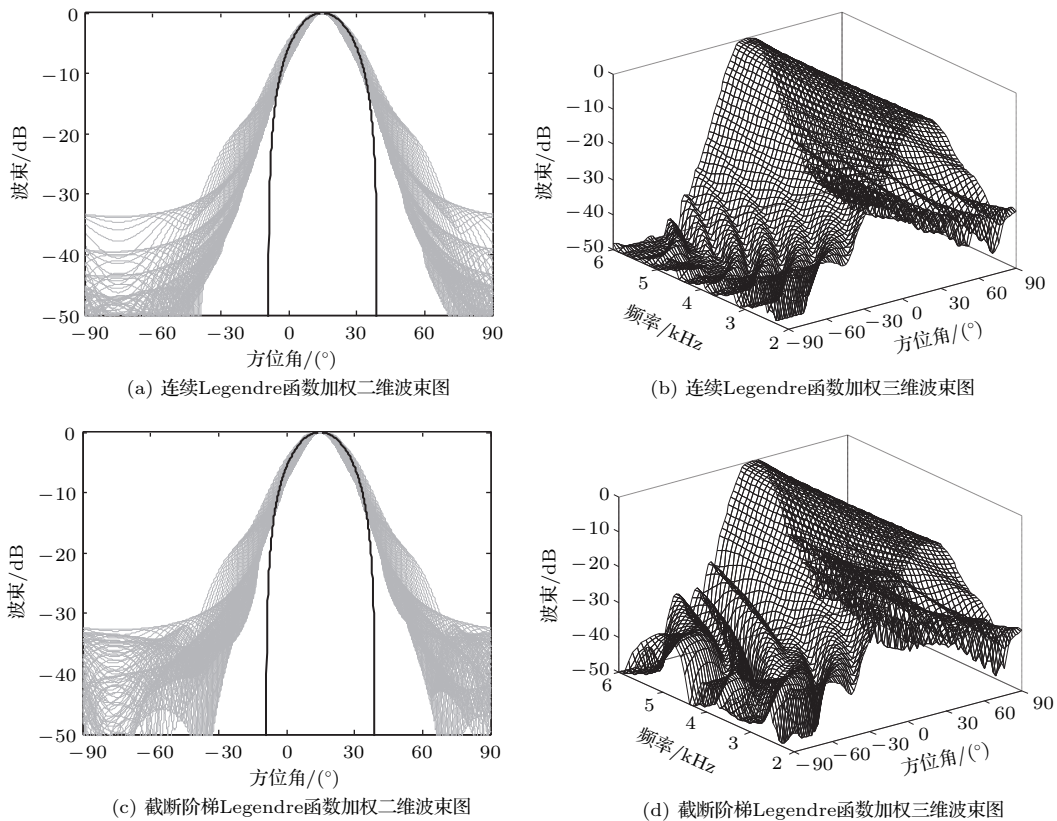


图5 截断阶梯 Legendre 函数加权非延时球面阵的波束

Fig. 5 Beam pattern of the non-delayed spherical array using stepped and truncated Legendre shading

4.2 截断阶梯 Legendre 函数柱面加权

其次计算分析截断阶梯 Legendre 函数柱面加权方法,即采用截断阶梯 Legendre 函数代替式(5)中的连续 Legendre 函数。同样考虑非延时阵列,根据式(6),即为柱面阵。

阶梯 Legendre 函数柱面加权的柱面阵的波束特性如图6所示,注意图6中的加权函数同样未被截断,即 $TRUNC = -\infty$ 。与球面阵类似,STEP 越小,阶梯 Legendre 函数加权与连续 Legendre 函数加权越接近,当 $STEP \leq 3$ dB 时,阶梯 Legendre 函数加权与连续 Legendre 函数加权的波束宽度已十分接近;而阶梯 Legendre 函数同样几乎不会改变柱面阵波束方向,因此阶梯 Legendre 函数对柱面阵的波束方向的影响可以忽略。

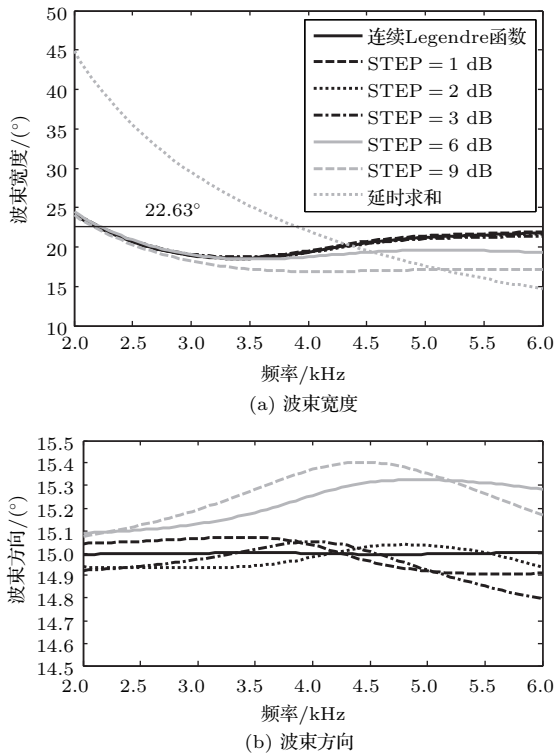


图6 阶梯 Legendre 函数加权非延时柱面阵的波束特性

Fig. 6 Characteristics of the beam generated by the non-delayed cylindrical array using stepped Legendre shading

截断 Legendre 函数柱面加权的柱面阵的波束特性如图7所示,注意图7中的加权函数同样采用的是连续 Legendre 函数,即 $STEP = 0$ dB。与球面阵类似: $TRUNC$ 越小,截断 Legendre 函

数加权与非截断 Legendre 函数加权越接近,当 $TRUNC \leq -21$ dB 时,截断 Legendre 函数加权与非截断 Legendre 函数加权的柱面阵的波束宽度已十分接近;截断 Legendre 函数对柱面阵波束的影响比阶梯 Legendre 函数的影响大;截断 Legendre 函数同样几乎不会改变柱面阵的波束方向,因此截断 Legendre 函数对柱面阵的波束方向的影响也可以忽略。

综合图6和图7的分析结果,为了便于与球面阵比较,取 $STEP = 3$ dB、 $TRUNC = -21$ dB 构建截断阶梯 Legendre 函数,如图2(c)所示,并计算柱面阵的波束,如图8所示。与球面阵相同,截断阶梯 Legendre 函数加权与连续 Legendre 函数加权的柱面阵的波束基本一致。截断阶梯 Legendre 函数加权导致了一些旁瓣,如图8(d)所示,但是这些旁瓣同样很小,其中最大旁瓣小于 -22 dB。因此,对于非延时柱面阵,截断阶梯 Legendre 函数加权也可以很好地近似连续 Legendre 函数加权。

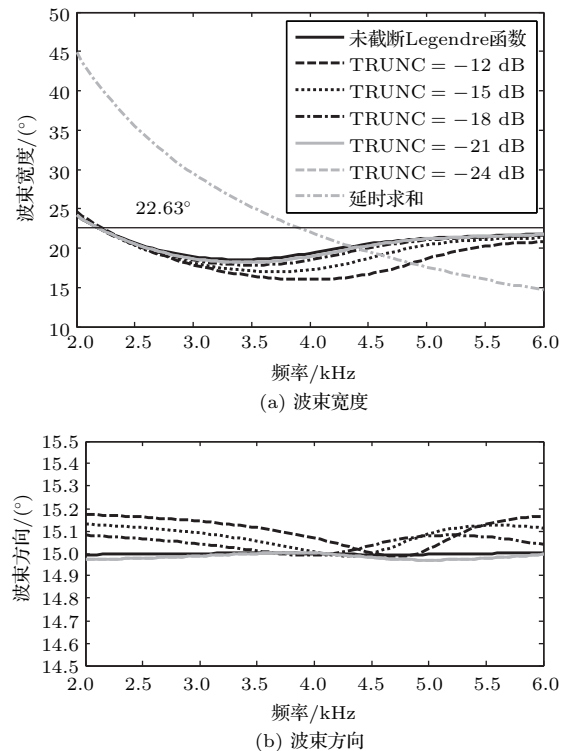


图7 截断 Legendre 函数加权非延时柱面阵的波束特性

Fig. 7 Characteristics of the beam generated by the non-delayed cylindrical array using truncated Legendre shading

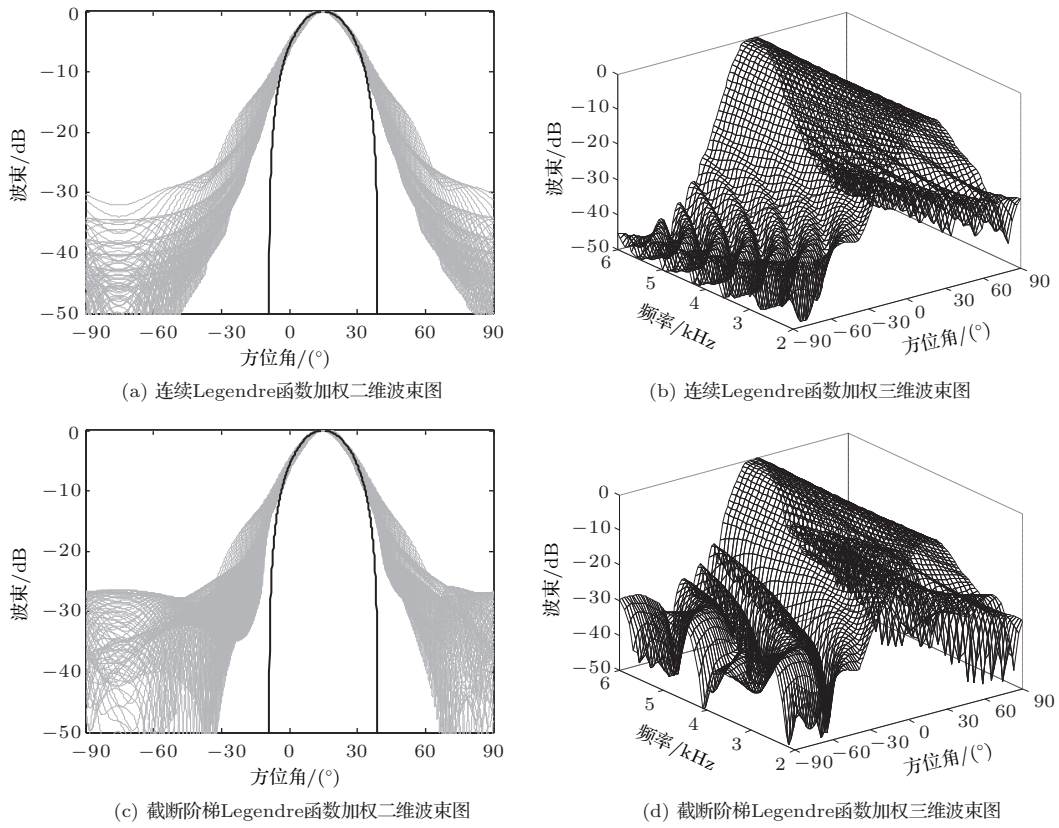


图8 截断阶梯 Legendre 函数加权非延时柱面阵的波束

Fig. 8 Beam pattern of the non-delayed cylindrical array using stepped and truncated Legendre shading

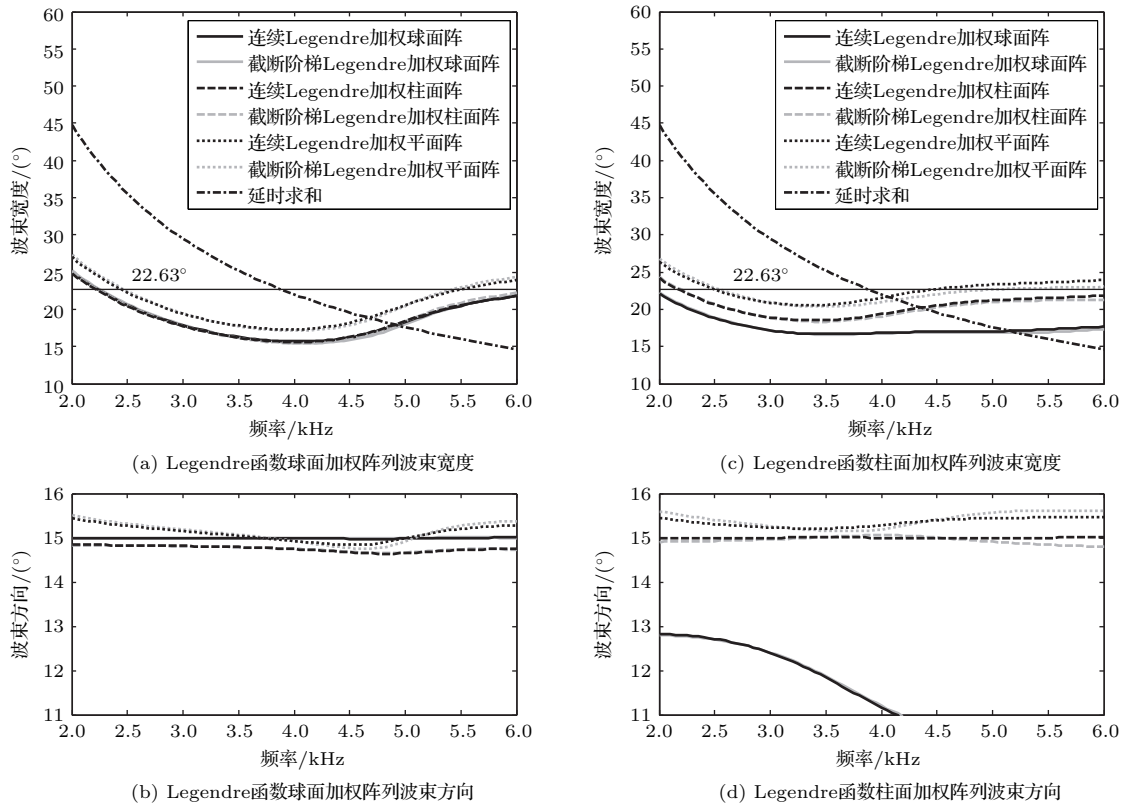


图9 截断阶梯 Legendre 函数加权延时阵列的波束特性

Fig. 9 Characteristics of the beam generated by the delayed array using stepped and truncated Legendre shading

4.3 延时阵列

最后计算分析延时面阵列,包括球面阵、柱面阵和平面阵。如图9所示为采用 $STEP = 3$ dB、 $TRUNC = -21$ dB截断阶梯Legendre函数加权与常规连续Legendre函数加权的延时面阵列的波束特性对比分析,图9中亦包含了之前分析的非延时阵列的波束特性。由图9可见,无论是对于Legendre函数球面加权(即式(3)和式(4))还是Legendre函数柱面加权(即式(5)和式(6)),截断阶梯Legendre函数加权与连续Legendre函数加权的延时阵列的波束宽度和波束方向基本一致,即图9中相同颜色的实线和虚线极为接近,因此截断阶梯Legendre函数加权均能较好地近似连续Legendre函数加权。

5 结论

本文分析了截断阶梯Legendre函数加权的面阵列的波束特性,包括Legendre函数球面加权方法和Legendre函数柱面加权方法。结果表明,大多数情况下截断阶梯Legendre函数主要影响波束宽度,而对波束方向的影响可以忽略。当 $STEP \leq 3$ dB时,阶梯Legendre函数可以较好地近似连续Legendre函数;当 $TRUNC \leq -21$ dB时,截断Legendre函数可以较好地近似未截断Legendre函数。进一步分析表明,采用 $STEP = 3$ dB、 $TRUNC = -21$ dB的截断阶梯Legendre函数即可在工作频率范围内较好地近似常规连续Legendre函数。就本文采用的阵列而言,常规连续Legendre函数需要采用百余个阵元权重,而截断阶梯Legendre函数仅需要采用8个阵元权重,因此截断阶梯Legendre函数可以有效地减少阵元加权系数的数量,从而在很大程度上减少计算复杂度。

参 考 文 献

- [1] 黄聪,李迪. 基于相干干扰抑制的时域恒定束宽波束形成[J]. 哈尔滨工程大学学报, 2017, 38(1): 25-30.
Huang Cong, Li Di. Constant beamwidth beamforming in time domain based on coherent interference suppression[J]. Journal of Harbin Engineering University, 2017, 38(1): 25-30.
- [2] 付彦,刘劲军. 一种基于Notch滤波器的恒定束宽波束形成技术[J]. 声学技术, 2013, 32(1): 50-53.
Fu Yan, Liu Jinjun. Constant beamwidth beamforming based on adaptive filter[J]. Technical Acoustics, 2013, 32(1): 50-53.
- [3] 甘甜,王英民. 一种稳健的恒定束宽波束形成方法[J]. 声学学报, 2012, 37(1): 18-24.
Gan Tian, Wang Yingmin. A robust broadband beamforming method of constant beam width[J]. Acta Acustica, 2012, 37(1): 18-24.
- [4] 鄢社锋,马晓川. 宽带波束形成器的设计与实现[J]. 声学学报, 2008, 33(4): 316-326.
Yan Shefeng, Ma Xiaochuan. Designs and implementations of broadband beamformers[J]. Acta Acustica, 2008, 33(4): 316-326.
- [5] van Buren A L, Luker L D, Jevnager M D, et al. Experimental constant beamwidth transducer[J]. J. Acoust. Soc. Am., 1983, 73(6): 2200-2209.
- [6] Rogers P H, van Buren A L. New approach to a constant beamwidth transducer[J]. J. Acoust. Soc. Am., 1978, 64(1): 38-43.
- [7] Trott W J, Jarzynski J. Array shading for a broadband constant directivity transducer[J]. J. Acoust. Soc. Am., 1978, 64(5): 1266-1269.
- [8] 朱舸,沈勇,夏洁,等. 恒定束宽扬声器线阵列优化研究[J]. 应用声学, 2017, 36(2): 95-104.
Zhu Ge, Shen Yong, Xia Jie, et al. Optimization of constant beam-width transducer line array[J]. Journal of Applied Acoustics, 2017, 36(2): 95-104.
- [9] Feng X, Shen Y, Keele D B, et al. Directivity-customizable loudspeaker arrays using constant-beamwidth transducer (CBT) overlapped shading[C]// Audio Engineering Society Convention 139, Audio Eng. Soc., 2015.
- [10] Keele D B. Full-sphere sound field of constant-beamwidth transducer (CBT) loudspeaker line arrays[J]. J. Audio Eng. Soc., 2003, 51(7/8): 611-624.
- [11] Keele D B. Practical implementation of constant beamwidth transducer (CBT) loudspeaker circular-arc line arrays[C]// Audio Engineering Society Convention 115, Audio Eng. Soc., 2003.
- [12] Keele D B. The application of broadband constant beamwidth transducer (CBT) theory to loudspeaker arrays[C]// Audio Engineering Society Convention 109, Audio Eng. Soc., 2000.
- [13] Keele D B. Implementation of straight-line and flat-panel constant beamwidth transducer (CBT) loudspeaker arrays using signal delays[C]// Audio Engineering Society Convention 113, Audio Eng. Soc., 2002.
- [14] 刘洪生,姜朝宇. 美俄潜艇声纳装备的发展[J]. 舰船电子工程, 2015, 35(5): 7-10.
Liu Hongsheng, Jiang Chaoyu. Sonar equipment development of USA and Russia submarine[J]. Ship Electronic Engineering, 2015, 35(5): 7-10.
- [15] Anderson B E, Hughes W J, Hambric S A. Grating lobe reduction in transducer arrays through structural filtering of supercritical plates[J]. J. Acoust. Soc. Am., 2009, 126(2): 612-619.
- [16] Wooh S C, Shi Y. Optimum beam steering of linear phased arrays[J]. Wave Motion, 1999, 29(3): 245-265.