

◇ 研究报告 ◇

sinc 函数加权圆弧形恒定束宽阵列*

冯雪磊[†] 蒋令闻 张崇丙 李晓伟

(中国船舶科学研究中心 深海载人装备国家重点实验室 无锡 214082)

摘要 加权函数对于圆弧形恒定束宽阵列的性能至关重要,因此分析了圆弧形恒定束宽阵列的加权函数的特性,并提出了 sinc 函数加权方法。分别对窄覆盖 sinc 函数加权阵列和宽覆盖 sinc 函数加权阵列的波束特性进行数值分析,验证其恒定束宽的波束特性。结果表明,sinc 函数加权阵列在工作频率范围内产生近似不随频率变化的波束。此外,还与多种已有的圆弧形恒定束宽阵列进行对比分析,包括 Legendre 函数加权阵列、余弦函数加权阵列、Chebyshev 多项式加权阵列等。结果表明,相较于已有的阵列,sinc 函数加权阵列具有更低的低频截止频率,因而对应更大的工作频率范围。

关键词 圆弧形阵列,恒定束宽阵列,sinc 函数加权,阵列加权,波束形成

中图分类号: TB565 文献标识码: A 文章编号: 1000-310X(2018)06-0904-05

DOI: 10.11684/j.issn.1000-310X.2018.06.011

Constant-beamwidth circular-arc line array using sinc-function array shading

FENG Xuelei JIANG Lingwen ZHANG Chongbing LI Xiaowei

(State Key Laboratory of Deep-Sea Manned Vehicles, China Ship Scientific Research Center, Wuxi 214082, China)

Abstract Shading function is critical to the performance capability of a constant-beamwidth array and is therefore analyzed theoretically and the sinc-function shading is then derived. A sinc-function-shaded narrow-arc array and broad-arc array are analyzed, and their constant-beamwidth performance capabilities are verified. The results indicate that the beam patterns vary little with frequency above the cutoff frequencies. Several existing constant-beamwidth circular-arc arrays are analyzed for comparison, including Legendre-function-shaded array, cosine-shaded array, Chebyshev-polynomials-shaded array, etc. The results indicate that the lower bandwidth limitation for sinc-function-shaded array is lower than those for existing constant-beamwidth arrays, corresponding to a wider operating bandwidth.

Key words Circular-arc line array, Constant-beamwidth array, sinc-function shading, Array shading, Beam-forming

2017-12-12 收稿; 2018-05-01 定稿

*国家重点研发计划项目 (2017YFB0202701), 国家自然科学基金项目 (11772304)

作者简介: 冯雪磊 (1989-), 男, 江苏无锡人, 工程师, 研究方向: 声学换能器。

[†] 通讯作者 E-mail: xlfeng@hotmail.com

1 引言

圆弧形换能器阵列是声学领域常用的阵列。为了不失真地处理宽带声学信号或者实现声场的均匀覆盖,通常要求声学换能器阵列在一定频率范围内具有不随频率变化的恒定波束特性^[1]。常用的声学换能器阵列通常可以采用数字信号处理方法实现恒定束宽,这种方法具有非常优越的性能^[2-3]。但是这种方法通常是将宽频带分为若干个窄带,在每个窄带中采用优化算法实现所需的波束,这就使得阵列中阵元的权重都是随频率变化的复杂函数,增加了计算的复杂度。

美国海军研究实验室的研究人员提出了基于 Legendre 函数加权的球冠形恒定束宽换能器 (Constant beamwidth transducer, CBT) 阵列^[4-5], 此后 Keele^[6] 将球冠形 CBT 阵列推广到圆弧形阵列。圆弧形 CBT 阵列可以利用不随频率变化的简单阵元权重, 实现宽频带的近似恒定束宽的波束特性。此外, Keele 还制造了圆弧形 CBT 阵列的原型样机, 并通过实验验证了圆弧形 CBT 阵列的波束特性。然而圆弧形 CBT 阵列的理论研究较少, 因此多采用 Legendre 函数加权这一种加权方法, 直到最近, Taylor 等^[7] 才提出了圆弧形恒定束宽阵列的初步理论框架, 并提出了多种其他加权方式。本文基于 Taylor 和 Keele 的工作, 分析圆弧形恒定束宽阵列的波束特性, 并提出 sinc 函数加权方法。

2 圆弧形恒定束宽阵列

圆弧形恒定束宽阵列的分析方法主要是基于 Taylor 和 Keele 的工作^[7], 但是本文所采用的公式略有不同, 这里主要列举不同之处和最终的公式, 详细的推导和分析参考文献^[7]。圆弧形阵列的几何结构如图 1 所示, 其中黑色粗圆弧表示阵列的有效部分。自由空间中阵列位于 $x-O-y$ 平面, 且阵列圆心位于坐标原点 O 。设 Q 为圆弧形阵列上的任意一点, P 为自由空间中的接收点, P' 为 P 在 $x-O-z$ 平面的投影。设 α ($-\pi \leq \alpha \leq \pi$) 为 x 轴正方向与 OQ 的夹角, θ ($-\pi \leq \theta \leq \pi$) 为 OP 与 $x-O-z$ 平面的夹角 (即 OP 与 OP' 的夹角), φ ($-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$) 为 OP' 与 x 轴正方向的夹角。假定接收点 P 位于远场, 且满足远场条件 $r \gg r_0$, 其中 r 为 P 到原点 O 的距离, r_0

为圆弧形阵列的半径, 推得接收点 P 处的声压为^[8]

$$p(\theta) = \frac{e^{-jkr}}{r} \int_{-\pi}^{\pi} A(\alpha) \exp [jkr_0 G(\varphi, \theta, \alpha)] r_0 d\alpha, \tag{1}$$

其中, $G(\varphi, \theta, \alpha) = \cos \varphi \cos \theta \cos \alpha + \sin \theta \sin \alpha$, $A(\alpha)$ 为与频率无关的阵元加权函数, k 为波数, $j = \sqrt{-1}$ 。

通常情况下, 所需的波束是关于轴向对称的, 并假定 x 轴是圆弧形阵列波束的轴向, 因此可以假定 $A(\alpha)$ 为偶函数, 这样可以将 $A(\alpha)$ 展开为余弦 Fourier 级数:

$$A(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\alpha). \tag{2}$$

此外多数情况下, 相对于圆弧形阵列在其他平面的波束, 对圆弧形阵列所在平面 (即 $x-O-y$ 平面) 的波束特性更感兴趣, 此时有 $\varphi = 0$ 。将 $\varphi = 0$ 和式 (2) 代入式 (1) 可以将积分项积出, 然后通过简单的运算得到

$$p(\theta) = 2\pi r_0 \frac{e^{-jkr}}{r} \sum_{n=0}^{\infty} a_n j^n J_n(kr_0) \cos(n\theta), \tag{3}$$

其中, $J_n(x)$ 为 n 阶 Bessel 函数。

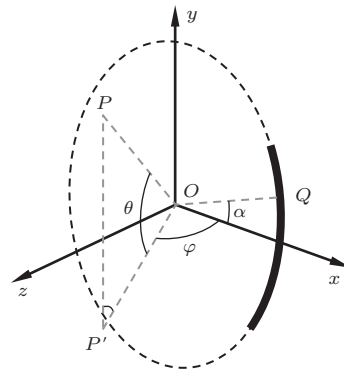


图1 圆弧形阵列

Fig. 1 Geometry of a circular-arc array

注意到当 $x \gg n$ 时 Bessel 函数 $J_n(x)$ 具有大宗量近似形式: $J_n(x) \approx \sqrt{2/(\pi x)} \cos(x - n\pi/2 - \pi/4)$, 因此考虑 $kr_0 \gg n$ 情况下, 在式 (3) 中采用 $J_n(x)$ 的近似式, 得到

$$p(\theta) = \sqrt{\frac{8\pi r_0}{k}} \frac{e^{-jkr}}{r} \sum_{n=0}^{\infty} a_n j^n \cos\left(kr_0 - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \times \cos(n\theta). \tag{4}$$

可以将 $A(\alpha)$ 分为奇数项部分和偶数项部分, 即 $A(\alpha) = A_o(\alpha) + A_e(\alpha)$, 其中

$$A_o(\alpha) = \sum_{n \text{ 为奇数}} a_n \cos(n\alpha),$$

$$A_e(\alpha) = \sum_{n \text{ 为偶数}} a_n \cos(n\alpha),$$

代入式(4) 推得

$$|p(\theta)|^2 = \frac{8\pi r_0}{kr^2} \left[A_e^2(\theta) \cos^2\left(kr_0 - \frac{\pi}{4}\right) + A_o^2(\theta) \sin^2\left(kr_0 - \frac{\pi}{4}\right) \right], \quad (5)$$

不难发现当 $|A_o(\theta)| = |A_e(\theta)|$ (即 $|A_o(\alpha)| = |A_e(\alpha)|$) 时, $p(\theta)$ 的幅度与频率无关, 即波束形状与频率无关。

考虑 $A_e(\alpha)$ 和 $A_o(\alpha)$ 的对称性: $A_e(\alpha)$ 关于 $\alpha = \pi/2$ 偶对称, 即 $A_e(\pi - \alpha) = A_e(\alpha)$; $A_o(\alpha)$ 关于 $\alpha = \pi/2$ 奇对称, 即 $A_o(\pi - \alpha) = -A_o(\alpha)$ 。这样不难发现, 在满足条件 $|A_o(\alpha)| = |A_e(\alpha)|$ 的情况下, $A(\alpha)$ 和 $A(\pi - \alpha)$ 中最多只有一个为非零。考虑到通常希望波束主瓣出现在 $\theta = 0$ 附近, 因此可以取

$$A(\alpha) = \begin{cases} f(\alpha), & |\alpha| \leq \alpha_0, \\ 0, & |\alpha| > \alpha_0, \end{cases} \quad (6)$$

其中, $0 < \alpha_0 \leq \pi/2$, $f(\alpha)$ 为待定偶函数。从式(6) 可以看出, 阵列仅在 $|\alpha| \leq \alpha_0$ 范围内有效, 如图1 所示。

综上所述, 可以总结出圆弧形恒定束宽阵列加权函数 $A(\alpha)$ 的两条准则: (1) 加权函数 $A(\alpha)$ 为偶函数, 并且具有式(6) 的形式; (2) 工作频率足够高, 使得高频近似条件 $kr_0 \gg n$ 对于式(2) 中不可忽略的项都能满足, 并且式(4) 中采用的近似具有足够高的精度。值得注意的是, 准则(2) 决定了恒定束宽阵列工作频率的下限, 即截止频率。

3 优化加权函数

3.1 sinc 加权函数

加权函数 $A(\alpha)$ 的构造对于圆弧形恒定束宽阵列的性能至关重要, 根据上文总结的准则(2), 考虑到式(5) 的近似条件, 为了使圆弧形恒定束宽阵列具有良好的波束特性, 加权函数 $A(\alpha)$ 的余弦 Fourier 级数的能量应当集中在低阶项, 而高阶项可

以忽略。这样可以定义整数 N , 使得当 $n > N$ 时, 式(2) 中的 a_n 可以忽略。根据前面的分析, 显然为了尽可能降低截止频率以提高工作带宽, 所选择的加权函数 $A(\alpha)$ 的 Fourier 频谱应在 $n = N$ 附近迅速下降, 而这对应数字信号处理领域的低通滤波器的冲击响应函数。注意到理想低通滤波器的频谱在截止频率 $n = N$ 处具有最快的下降速度, 因此可以选择函数 $f(\alpha)$ 为理想低通滤波器的单位冲击响应, 即 sinc 函数。为了避免旁瓣, 可以取

$$f(\alpha) = \text{sinc} \frac{\alpha}{\alpha_0}, \quad (7)$$

其中, $\text{sinc}(x)$ 为归一化 sinc 函数, 即 $x \neq 0$ 时 $\text{sinc}(x) = \sin(\pi x)/(\pi x)$, $x = 0$ 时 $\text{sinc}(x) = 1$ 。此时加权函数 $A(\alpha)$ 为在零点截断的 sinc 函数的主瓣。

3.2 截止频率

截止频率是恒定束宽阵列的重要参数, 截止频率越低, 对应的工作频率范围越大。这里采用 Rogers 和 van Buren^[5] 提出的方法进行分析。Rogers 和 van Buren 提出, 对于 CBT 阵列, 考虑 a_n^2 为 α_0 的函数, 当 $n \leq N$ 时 a_n^2 取得极大值, N 为满足这一条件的最大正整数。由式(2) 可见, a_n 可由 $A(\alpha)$ 的逆 Fourier 积分得到

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\alpha_0} A(\alpha) \cos(n\alpha) d\alpha, \quad n > 0, \quad (8)$$

$n = 0$ 的情况下只是积分号前的系数改为 $1/\pi$, 因此不再赘述。对于权函数 $A(\alpha)$, 即满足式(6) 和式(7), 推得

$$\frac{\partial a_n^2}{\partial \alpha_0} = \frac{4}{\pi} a_n f(\alpha_0) \cos(n\alpha_0) = 0, \quad (9)$$

即 a_n^2 总是为极值。为了判断 a_n^2 取得极大值还是极小值, 需要检验 a_n^2 的二阶导数, 得到

$$\frac{\partial^2 a_n^2}{\partial \alpha_0^2} = \frac{4}{\pi} a_n f'(\alpha_0) \cos(n\alpha_0), \quad (10)$$

其中, $f'(x) = df(x)/dx$ 。对于本文提出的 sinc 加权函数, 显然有 $f'(\alpha_0) < 0$ 。这样有 $N = \lfloor \pi/(2\alpha_0) \rfloor$, 其中 $\lfloor x \rfloor$ 为不大于 x 的最大整数。此时, 当 $n \leq N$ 时, 在区间 $[0, \alpha_0]$ 内有 $\cos(n\alpha) > 0$, 因而根据式(8) 得到 $a_n > 0$, 因此 $\partial^2 a_n^2 / \partial \alpha_0^2 < 0$, a_n^2 取得极大值。当 $n = N + 1$ 时, 对于式(7) 给出的 $f(\alpha)$ 经数值计算不难验证有 $\partial^2 a_n^2 / \partial \alpha_0^2 > 0$, a_n^2 取得极小值。根据前面提出的准则(2) 为 $kr_0 \gg n$ 对于不可忽略的 a_n 均成立, 显然有 $kr_0 \gg N$, 得到

$$kl \gg \pi, \quad (11)$$

其中, l 为圆弧形阵列有效部分的弧长, 即 $l = 2\alpha_0 r_0$ 。式 (11) 给出了一个估计截止频率的粗略方法, 同时式 (11) 提示截止频率与 kl 有关。

4 仿真分析

为了验证本文所提出的 sinc 函数加权阵列的性能, 采用 Riemann 求和来近似式 (1), 分别计算窄覆盖和宽覆盖连续 sinc 函数加权圆弧形恒定束宽阵列在阵列所在平面的波束特性, 如图 2 所示。其中窄覆盖阵列对应 $\alpha_0 = 15^\circ$, 宽覆盖阵列对应 $\alpha_0 = 60^\circ$, 计算频率对应的 kl 的取值范围为 $10 \sim 10000$ 。图 2(a) 和图 2(b) 分别为窄覆盖圆弧形阵列和宽覆盖圆弧形阵列的三维波束图, 由图 2 可见, 无论是窄覆盖阵列还是宽覆盖阵列, 当 kl 大于某一值以后, 阵列的指向性具有非常高的一致性, 其

波束宽度近似不随频率变化。

进一步计算 sinc 函数加权阵列的 -6 dB 波束宽度, 并且分别与其他圆弧形恒定束宽阵列的波束宽度进行对比, 如图 3 所示, 其中黑色实线为 sinc 函数加权阵列, 黑色虚线为 Bessel 函数加权阵列, 黑色点线为 Legendre 函数加权阵列, 灰色实线为余弦函数加权阵列, 灰色虚线为 Chebyshev 多项式加权阵列。图 3(a) 中的窄覆盖阵列均采用 $\alpha_0 = 15^\circ$, 图 3(b) 中的宽覆盖阵列均采用 $\alpha_0 = 60^\circ$ 。由图 3 可见, 不同阵列对应的波束宽度不同, 这是由于其加权函数的形状各不相同。Bessel 函数加权为 $f(\alpha) = J_0(x_0\alpha/\alpha_0)$, 其中 x_0 为 $J_0(x)$ 的最小正零点, 即 $x_0 = 2.405$; 圆弧形 CBT 阵列采用的 Legendre 函数加权为 $f(\alpha) = P_\nu(\cos \alpha)$, 其中 $P_\nu(x)$ 为 Legendre 函数, 且设定阶数 ν 使得 α_0 为 $P_\nu(\cos \alpha)$

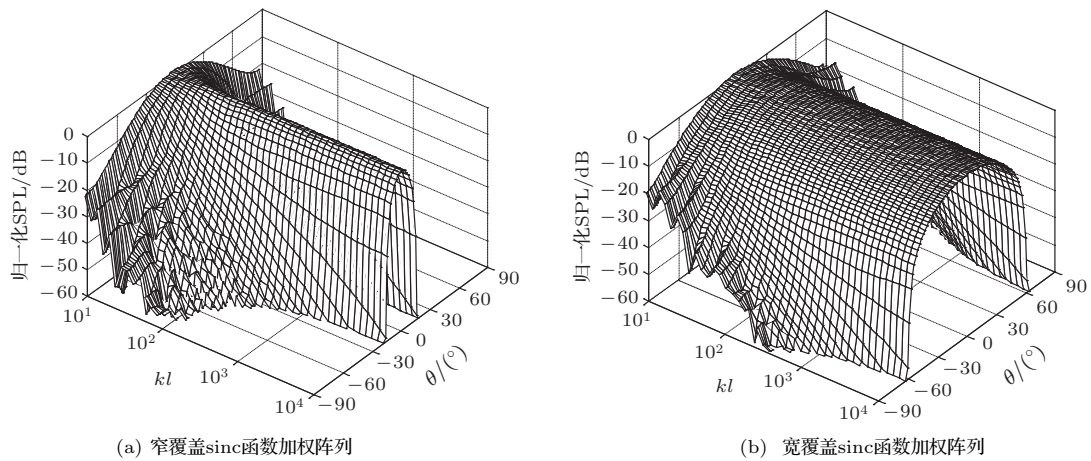


图2 sinc 函数加权恒定束宽阵列三维波束图

Fig. 2 Beam patterns (in the plane of the array) of sinc-function-shaded arrays

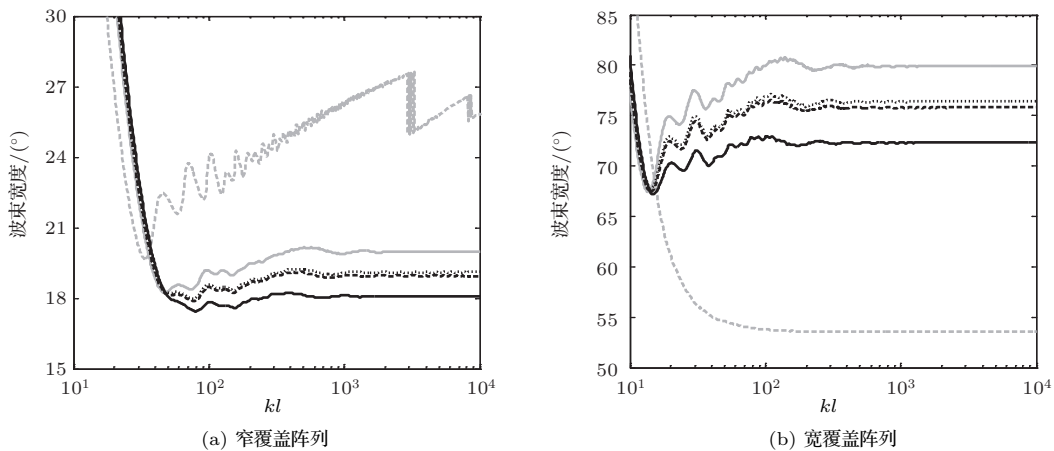


图3 恒定束宽阵列波束宽度

Fig. 3 Beamwidths of various constant-beamwidth arrays

的最小正零点; Taylor和Keele提出的余弦函数加权和Chebyshev多项式加权分别为 $f(\alpha) = \cos[(\pi\alpha)/(2\alpha_0)]$ 、 $f(\alpha) = T_n[2u(\alpha)/u(\alpha_0) - 1]$, 其中 $u(\alpha) = 1 + \cos\alpha$, $T_n(x)$ 为 n 阶Chebyshev多项式。由图3可见, 无论是窄覆盖阵列还是宽覆盖阵列, 在高于截止频率时, 波束宽度随频率变化均很小, 其中sinc函数加权阵列的波束宽度变化相对更小一些。注意到Chebyshev多项式加权阵列对于宽覆盖阵列有较好的性能, 而对于窄覆盖阵列性能较差, 这主要是由于对于较小的 α_0 , Chebyshev多项式加权函数并不足够集中在 $\alpha = 0$ 附近。

计算不同阵列的截止频率, 如图4所示。显然, 根据式(11)无法计算截止频率, 因此这里采用一个可行的截止频率的计算准则: 当工作频率高于截止频率时, 阵列的波束宽度与设计波束宽度的偏差不超过5%。这里阵列的波束宽度由仿真计算得到, 而设计波束宽度实际上是加权函数 $A(\theta)$ 的波束宽度(根据第2节的分析, 当频率足够高时, 有 $|p(\theta)| \propto |A(\theta)|$)。对于sinc函数加权恒定束宽阵列, -6 dB设计波束宽度约为 $1.2\alpha_0$ 。由图4可见, 对于大部分 α_0 , sinc函数加权阵列均具有较低的截止频率。注意到较低的 α_0 对应较高的截止频率, 这是因为本文采用的波束宽度的计算准则在 α_0 较小时更为苛刻。此外, 图4中截止频率曲线出现若干不连续性, 这主要是由于波束宽度曲线在截止频率附近的波动引起的, 如图3所示。还可以进一步计算得到, 对于sinc函数加权阵列, 当 $kl > 20\pi$ 时, 约90%的 α_0 情况下工作频率高于截止频率, 而当 $kl > 10\pi$

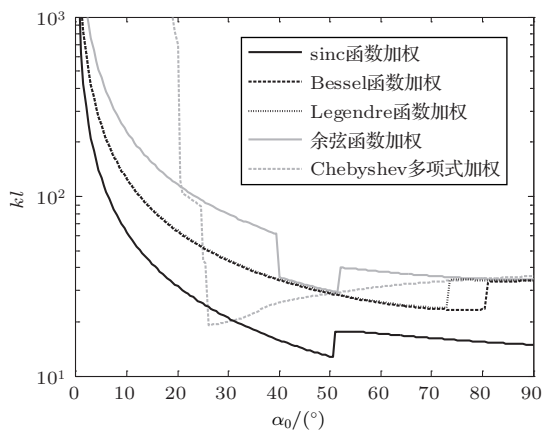


图4 不同阵列的截止频率

Fig. 4 Cutoff frequencies of various constant-beamwidth circular-arc line arrays

时, 约80%的 α_0 情况下工作频率高于截止频率。此外, 由于滤波器设计中常用的窗函数也具有圆弧恒定束宽阵列加权函数的性质, 因此窗函数也能作为加权函数。但是通过计算表明, 使用多种常见的窗函数会导致较高的截止频率, 并且采用在截断点(即 $\alpha = \pm\alpha_0$)处不为零的窗函数会导致波束的畸变。

本文采用Riemann求和来近似式(1)中的积分, 因此计算得到的波束实际上是阵元间距很近的离散阵列的波束, 而为了避免出现栅瓣采用的积分步长对应的 $r_0 d\alpha$ 为不大于计算频率对应波长的 $1/2.5$ (其中 $r_0 d\alpha$ 为相邻阵元间的弧长, 略大于阵元间距)。

5 结论

本文提出了sinc加权函数, 并对比分析了窄覆盖和宽覆盖sinc函数加权阵列和其他函数加权阵列的波束特性。结果表明, sinc函数加权阵列在工作频率范围内具有良好的波束一致性。此外还对比分析了其他多种加权方法, 结果表明, sinc函数加权阵列具有更低的截止频率, 对应更大的工作频率范围。

参 考 文 献

- [1] Toole F E. Sound reproduction: loudspeakers and rooms[M]. Burlington: Focal Press, 2008.
- [2] Wang Y, Yang Y, Ma Y, et al. Broadband pattern synthesis for circular sensor arrays[J]. Journal of the Acoustical Society of America, 2014, 136(2): EL153-EL158.
- [3] Yan S. Optimal design of modal beamformers for circular arrays[J]. Journal of the Acoustical Society of America, 2015, 138(4): 2140-2151.
- [4] Jarzynski J, Trott W J. Array shading for a broadband constant directivity transducer[J]. Journal of the Acoustical Society of America, 1978, 64(5): 1266-1269.
- [5] Rogers P H, van Buren A L. New approach to a constant beamwidth transducer[J]. Journal of the Acoustical Society of America, 1978, 64(1): 38-43.
- [6] Keele D B. Full-sphere sound field of constant-beamwidth transducer (CBT) loudspeaker line arrays[J]. Journal of the Audio Engineering Society, 2003, 51(7): 611-624.
- [7] Taylor R, Keele D B. Theory of constant directivity circular-arc line arrays[C]// Audio Engineering Society Convention 143. Audio Engineering Society, New York, 2017.
- [8] Ureda M S. Analysis of loudspeaker line arrays[J]. Journal of the Audio Engineering Society, 2004, 52(5): 467-495.