

◇ 研究报告 ◇

孔隙介质与液体界面上波动方程数值模拟的改进方案——MPML边界条件的应用*

王颖^{1,2} 陈浩^{1,2,3†}

(1 中国科学院声学研究所 声场声信息国家重点实验室 北京 100190)

(2 北京市海洋深部钻探测量工程技术研究中心 北京 100190)

(3 中国科学院大学 北京 100049)

摘要 由于波场数值模拟的计算区域是有限的,为了压制截断边界造成的人工边界反射,通常采用完全匹配层作为吸收边界条件。但是在含液-固界面的弹性介质中进行正演模拟时,完全匹配层边界条件容易造成稳定性方面的问题。因此,该文将多轴完全匹配层应用于该类介质的正演模拟,以改善完全匹配层边界条件引起的不稳定问题。通过在具有弹性海底的海洋环境模型以及充填液体的井孔模型中进行弹性波方程的正演模拟,分别采用传统的完全匹配层和多轴完全匹配层作为吸收边界条件,对比验证了多轴完全匹配层在含液-固界面弹性介质中数值模拟的有效性和稳定性。

关键词 液-固界面,有限差分,完全匹配层,多轴完全匹配层,稳定性

中图分类号: O429 文献标识码: A 文章编号: 1000-310X(2018)06-0849-06

DOI: 10.11684/j.issn.1000-310X.2018.06.003

An improvement scheme for the wave equation simulation at the porous medium-liquid interface—Application of the boundary condition of MPML

WANG Ying^{1,2} CHEN Hao^{1,2,3}

(1 State Key Laboratory of Acoustics, Institute of Acoustics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China)

(2 Beijing Engineering Research Center for Offshore Drilling Exploration and Measurement, Beijing 100190, China)

(3 University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China)

Abstract Due to the limited computation domain in wavefield simulation, the perfectly matched layer (PML) is usually used as absorbing boundary condition to suppress the artificial reflection caused by the truncated boundary. However, when simulating in elastic medium with liquid-solid interface, the stability problem for PML arises easily. So multi-axial perfectly matched layer (MPML) is applied in the paper for the simulation of the above medium, to modify the instability problem brought by PML. The elastic wave equation is simulated in ocean environment model with elastic seabed and borehole model with liquid filling, where traditional PML and MPML are used respectively, to compare and demonstrate the effectiveness and stability of MPML in simulation of medium with liquid-solid interface.

Key words Liquid-solid interface, Finite difference, Perfectly matched layer, Multi-axial perfectly matched layer, Stability

2017-12-25 收稿; 2018-05-15 定稿

*中国博士后科学基金资助项目(2017M611017)

作者简介: 王颖(1987-),女,山东泰安人,博士后,研究方向:井孔声场数值模拟与处理。

†通讯作者 E-mail: chh@mail.ioa.ac.cn

1 引言

自从1968年Alterman等^[1]首次将有限差分方法(Finite difference method, FDM)应用于层状介质的弹性波动方程求解问题以来,FDM已经成功地发展成为应用最为广泛的波动方程正演模拟数值方法之一,并在复杂非均匀介质波场模拟领域发挥着越来越重要的作用。有限差分法计算效率较高,易于编程和并行运算,并且能够很好地处理各种强不均匀介质问题,是声场模拟的一种快速而精确的数值方法。

在波场数值模拟中由于计算区域是有限的,为了压制截断边界造成的人工边界反射,通常采用完全匹配层(Perfectly matched layer, PML)作为吸收边界条件。PML方法由Berenger^[2]在1994年最先提出,后来又经过很多学者的改进,已经在波场数值模拟领域得到了十分成功的应用。该方法的基本思想是在研究区域的边界上加上一个吸收层,使边界上传入吸收层的波随传播距离的增加呈指数衰减,不产生反射,以此来达到消除边界反射的目的^[3]。相比其他的边界条件,如指数衰减吸收边界条件^[4]、旁轴近似吸收边界条件^[5]、廖氏吸收边界条件^[6]、Higdon吸收边界条件^[7],PML边界条件具有最佳的吸收特性。

有研究指出,当应用于弹性波或者各向异性波动方程时,由于介质的非均匀性以及自由边界条件的施加,PML边界条件容易面临稳定性方面的问题^[8]。在具有液-固界面的弹性介质模型(比如,具有弹性海底的海洋环境模型以及充填液体的井孔模型等)中进行弹性波方程的正演模拟时,也发现了此类问题:随着有限差分迭代次数的增加,在液体与固体的分界面处产生了异常值,该异常值随着时间的推移不断增长,而且从PML边界处向内部区域逐渐扩散,损害了内部区域的有效波场,最终造成数值模拟的失败。

传统的PML吸收边界条件只能较好地衰减垂直边界方向入射的波,在掠射情况下边界反射吸收效果不佳,随着迭代误差的累积,出现指数增长解而导致数值计算的不稳定。Meza-Fajardo等^[9]通过求解PML方程系数矩阵的特征值(有多重零根),验证了传统的PML不满足严格的渐近稳定性,因而在数值模拟时容易出现不稳定的问题。在此基础

上提出了在多个正交方向同时衰减的多轴完全匹配层(Multi-axial perfectly matched layer, MPML)边界条件,并通过特征值灵敏度分析方法证明,MPML的稳定性与不同方向衰减因子的比例系数有关(PML情形下该系数为零,因而不稳定)。通过调整该比例系数,系数矩阵特征值的实部向负半轴移动,从而满足渐进稳定性条件,达到改善MPML稳定性的目的。借鉴该思路,本文将MPML应用于含液-固界面弹性介质模型的正演模拟,以解决在具有液-固界面的弹性介质模型中数值模拟不稳定的问题。在数值模拟阶段,分别在具有弹性海底的海洋环境模型和充填液体的井孔模型中进行弹性波方程的正演模拟,不失一般性,这两种情况下对应的液-固界面形状分别为水平层状和圆管状。两个算例均得到了有效的模拟结果,验证了MPML在含液-固界面弹性介质中数值模拟的有效性、稳定性和普遍适用性。

2 计算模型和计算方法

在交错网格中,借助空间四阶、时间二阶精度的有限差分算子对具有一阶速度-应力形式的弹性波方程进行求解。同时,由于计算区域是有限的,在波场模拟中采用MPML作为吸收边界条件,以压制截断边界造成的人工反射,同时能够保证长时间数值模拟的稳定性。

2.1 波动方程及其有限差分

在直角坐标系中,一阶速度-应力形式的二维弹性波方程如下所示:

$$\begin{cases} \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial t} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v_z}{\partial z}, \\ \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial t} = \lambda \frac{\partial v_x}{\partial x} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_z}{\partial z}, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial t} = \mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right), \\ \frac{\partial v_x}{\partial t} = b_x \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right), \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} = b_z \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right), \end{cases} \quad (1)$$

其中, v_x 、 v_z 为 x 和 z 方向的速度, τ_{xx} 、 τ_{zz} 为正应力, τ_{xz} 为剪应力, λ 、 μ 为拉梅系数, b_x 、 b_z 表示密度的倒数。采用空间四阶、时间二阶精度的交错网格有限差分方法对方程(1)进行求解,对应的离散格式为

$$\begin{cases} \tau_{xx,i,j}^{k+\frac{1}{2}} = \tau_{xx,i,j}^{k-\frac{1}{2}} + \Delta t \left[(\lambda + 2\mu)_{i,j} D_{x,i,j}^{L_x} v_x^k + \lambda_{i,j} D_{z,i,j}^{L_z} v_z^k \right], \\ \tau_{zz,i,j}^{k+\frac{1}{2}} = \tau_{zz,i,j}^{k-\frac{1}{2}} + \Delta t \left[\lambda_{i,j} D_{x,i,j}^{L_x} v_x^k + (\lambda + 2\mu)_{i,j} D_{z,i,j}^{L_z} v_z^k \right], \\ \tau_{xz,i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} = \tau_{xz,i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} + \Delta t \mu_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^* \left[D_{x,i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{L_x} v_z^k + D_{z,i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{L_z} v_x^k \right], \\ v_{x,i+\frac{1}{2},j}^{k+1} = v_{x,i+\frac{1}{2},j}^k + b_{x,i+\frac{1}{2},j} \Delta t \left(D_{x,i+\frac{1}{2},j}^{L_x} \tau_{xx}^{k+\frac{1}{2}} + D_{z,i+\frac{1}{2},j}^{L_z} \tau_{xz}^{k+\frac{1}{2}} \right), \\ v_{z,i,j+\frac{1}{2}}^{k+1} = v_{z,i,j+\frac{1}{2}}^k + b_{z,i,j+\frac{1}{2}} \Delta t \left(D_{x,i,j+\frac{1}{2}}^{L_x} \tau_{xz}^{k+\frac{1}{2}} + D_{z,i,j+\frac{1}{2}}^{L_z} \tau_{zz}^{k+\frac{1}{2}} \right), \end{cases} \quad (2)$$

其中, D_x 、 D_z 分别表示对 x 和 z 的一阶微分算子, i 、 j 分别为 x 和 z 方向的空间网格位置, k 为时间层位置, Δt 为时间步长。而且对 μ 、 b_x 、 b_z 等参数的设置遵循了 Zeng 等^[10] 改进的真空法, 如下所示:

$$\mu_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^* = \begin{cases} \left[\frac{1}{4} \left(\frac{1}{\mu_{i,j}} + \frac{1}{\mu_{i+1,j}} + \frac{1}{\mu_{i,j+1}} + \frac{1}{\mu_{i+1,j+1}} \right) \right]^{-1}, \\ \text{if } (\mu_{i,j} \mu_{i+1,j} \mu_{i,j+1} \mu_{i+1,j+1} \neq 0), \\ 0, \text{ otherwise,} \end{cases} \quad (3)$$

$$b_{x,i+\frac{1}{2},j} = \begin{cases} \frac{2}{\rho_{i+1,j} + \rho_{i,j}}, & \text{if } (\rho_{i+1,j} \neq 0 \text{ or } \rho_{i,j} \neq 0), \\ 0, & \text{if } (\rho_{i+1,j} = 0, \rho_{i,j} = 0), \end{cases} \quad (4)$$

$$b_{z,i,j+\frac{1}{2}} = \begin{cases} \frac{2}{\rho_{i,j} + \rho_{i,j+1}}, & \text{if } (\rho_{i,j+1} \neq 0 \text{ or } \rho_{i,j} \neq 0), \\ 0, & \text{if } (\rho_{i,j+1} = 0, \rho_{i,j} = 0), \end{cases} \quad (5)$$

通过式(3)~式(5)保证了模型上边界处自由边界条件的实现。而且通过该方法, 在海水与海底交界处, 对应的液-固界面处剪应力为零的边界条件也能自动实现。

在波场模拟中由于计算区域是有限的, 为了压制截断边界造成的人工边界反射, 本论文中采用 MPML 作为吸收边界条件。该边界条件作为传统 PML 边界条件的扩展, 在多个正交方向同时引入衰减因子, 通过调整不同方向衰减因子的比例系数达到改善 MPML 稳定性的目的。以 x 方向为例, 传统的 PML 方程中, 只有一个衰减因子是空间变量 x 的函数, 即

$$d_x = d_x(x), \quad d_y = 0, \quad d_z = 0, \quad (6)$$

而在 MPML 中, 三个正交方向上的衰减因子同为坐标 x 的函数, 即

$$\begin{aligned} d_x &= d_x^{(x)}(x), \quad d_y = d_y^{(x)}(x), \quad d_z = d_z^{(x)}(x), \\ d_y^{(x)}(x) &= p^{(y/x)} d_x^{(x)}(x), \\ d_z^{(x)}(x) &= p^{(z/x)} d_x^{(x)}(x), \end{aligned} \quad (7)$$

其中, $p^{(y/x)}$ 、 $p^{(z/x)}$ 分别为 y 、 z 方向衰减因子的比例系数, 通过调整该系数可达到改善计算结果稳定性的目的^[9]。当比例系数均为零时, MPML 方程(7)退化为传统的 PML 形式方程(6)。在高泊松比介质中, MPML 能保证数值模拟的稳定性。

2.2 数值模拟和算例分析

本文中设计了两个模型: 具有弹性海底的海洋环境模型以及充填液体的井孔模型。对方程(2)迭代计算, 即可得到不同时刻的波场值。采用 MPML 作为吸收边界条件, 即在模型的正演模拟中, 将模型的左右边界及下边界设为 MPML 层, 以有效地压制边界处的人工反射, 同时与采用了 PML 层的模型正演模拟结果对比, 验证 MPML 在长时间数值模拟方面的稳定性优势。

图1为具有弹性海底的海洋环境模型, 海水深度 50 m, 数值模拟时震源设置在水深 45 m 处(图1中星形所示), 在震源右侧距离分别为 500 m、1500 m、2500 m、3500 m、5000 m、10000 m 的六个

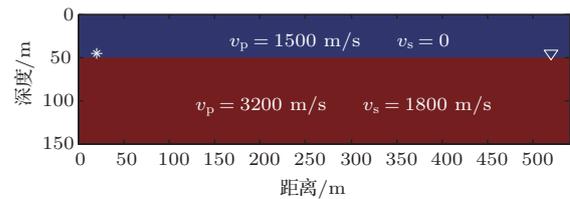


图1 含液-固界面狭长模型(以源距 500 m 为例)

Fig. 1 Elongated model with liquid-solid interface (take source-receiver interval of 500 m for example)

位置放置了接收器(图1中倒三角所示,为了显示美观,仅给出了源距500 m的情形)。震源采用主频为50 Hz的Ricker子波。

图2为分别采用PML和MPML作为吸收边界条件时六个接收位置记录到的波形,记录长度为10 s。从图2上看,两种边界得到的结果相似。但是,当接收记录长度扩展为40 s时,如图3所示,采用PML吸收边界条件的数值模拟出现了不稳定现象,而且该异常值幅值特别大,使得真实的波场信号无法识别,而采用MPML吸收边界条件则较好地控制了数值模拟的稳定性,得到了有效的波形记录。在后续的模拟中,将接收记录长度延长至100 s(图略),采用了MPML边界的结果仍然是稳定的。

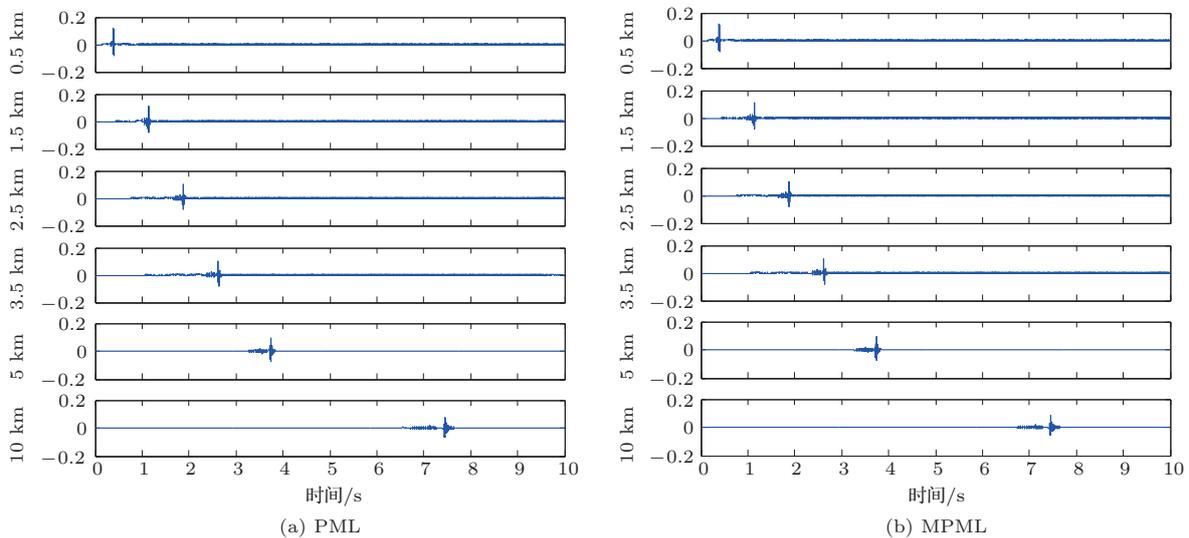


图2 不同源距处接收信号,记录长度10 s

Fig. 2 Signal at different source-receiver distances with record length of 10 s

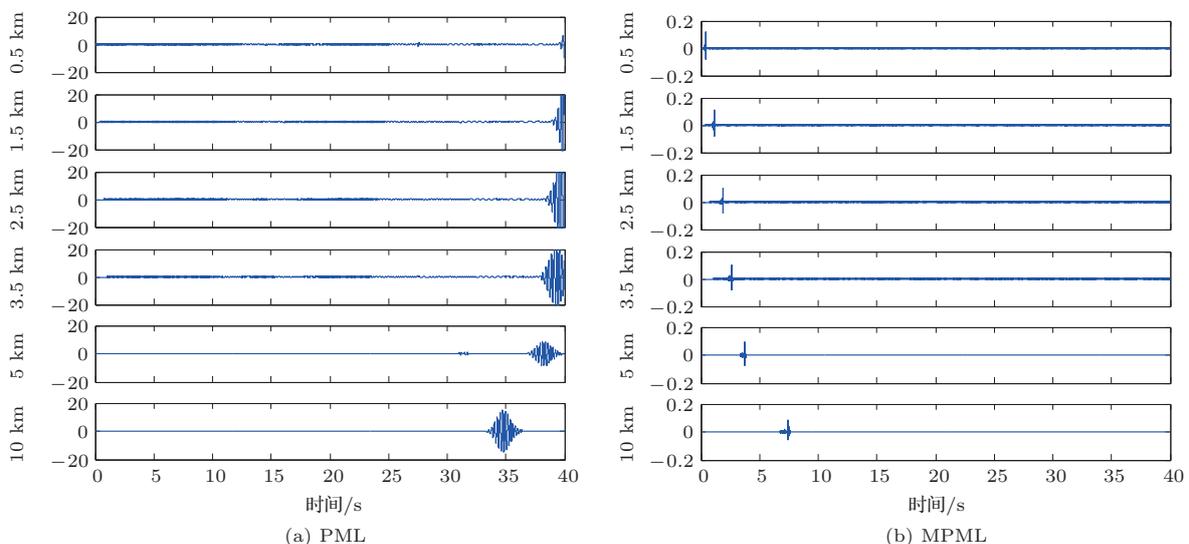


图3 不同源距处接收信号,记录长度40 s

Fig. 3 Signal at different source-receiver distances with record length of 40 s

图4为充填液体的井孔模型(二维横切面),模型中心为井孔,内有液体,靠近井孔的地层为慢地层,远离井孔的地层为快地层,地层速度如图4所标示。在井孔中居中布置了偶极子声源^[11]和接收器,震源主频为4 kHz。图5给出了沿井轴不同源距处接收到的波形记录,从图5上可以看到,当记录长度为9 ms时,采用PML和MPML作为吸收边界条件的数值模拟结果基本一致。但是,当记录长度增加至0.9 s时,如图6所示,采用PML作为吸收边界情形下的模拟计算出现数值溢出的现象,造成正演模拟的失败,而采用MPML能维持数值计算的稳定性,给出有效的计算结果。

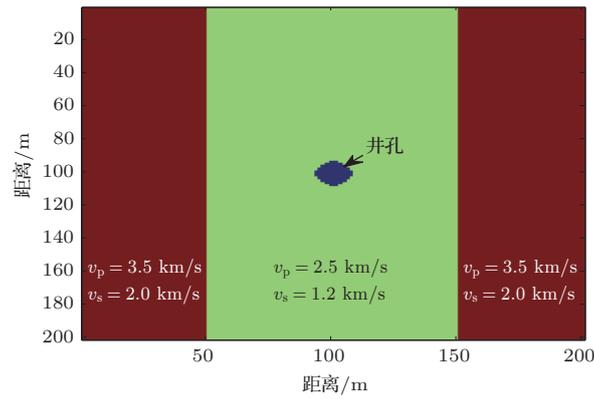


图4 充填液体的井孔模型

Fig. 4 Borehole model with liquid filling

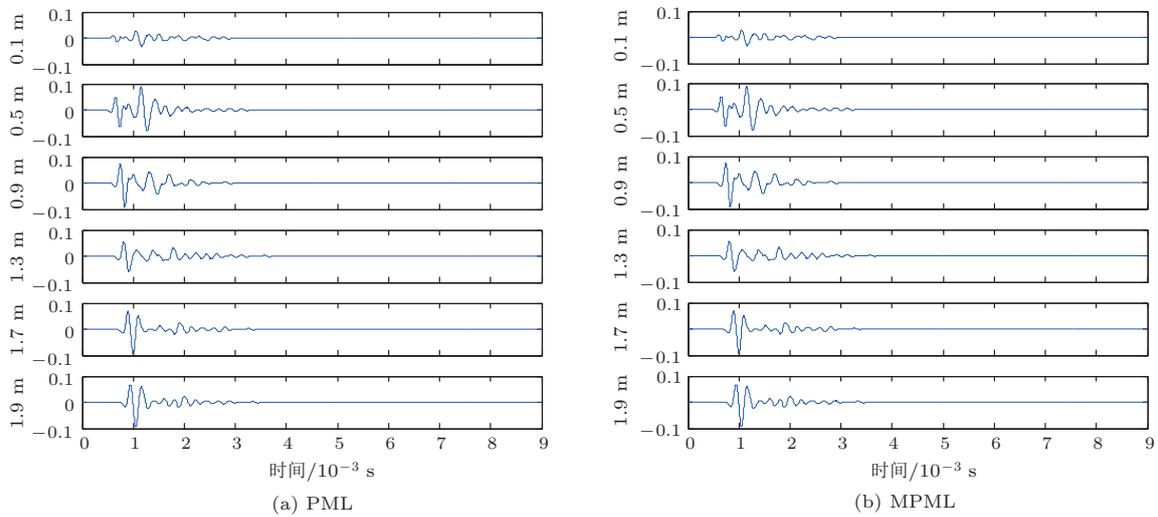


图5 不同源距处接收信号,记录长度9 ms

Fig. 5 Signal at different source-receiver distances with record length of 9 ms

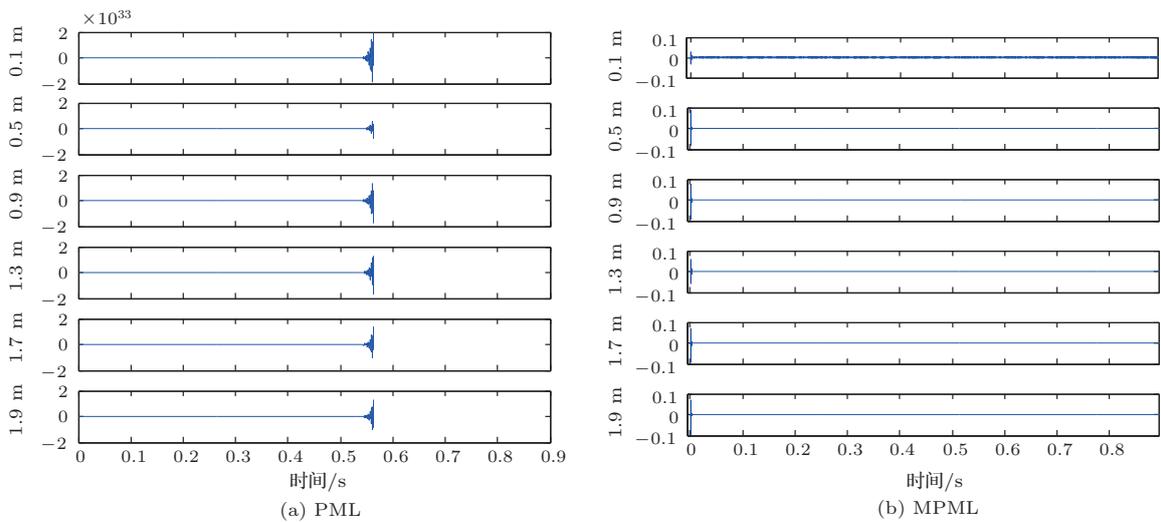


图6 不同源距处接收信号,记录长度0.9 s

Fig. 6 Signal at different source-receiver distances with record length of 0.9 s

3 讨论及结论

在具有弹性海底的海洋环境模型以及充填液体的井孔模型中正演模拟,分别采用PML和MPML作为吸收边界条件,在短时间模拟情况下二者均可以得到有效稳定的记录,但是当模拟时间加长,配置了PML的模型正演模拟出现不稳定的现象,造成数值模拟的失败,而采用MPML的模型整个计算过程中能够保持数值的稳定,能提供有效的波场记录。通过该数值模拟的对比,MPML在含液-固界面弹性介质正演模拟的有效性和稳定性得到了验证。

本论文可以得到以下结论:对于短源距或者短时间模拟,PML是可行的;当源距较大或者模拟时间长时,PML在液-固界面处容易出现不稳定性性的问题;在含液-固界面狭长模型及井孔模型中的测试结果表明,MPML能确保数值模拟的稳定性,因而适用于大源距或者长时间的含液-固界面弹性介质正演模拟。在今后的工作当中,拟将本文的这种吸收边界条件用于各种远距离声场的数值模拟和分析,包括但不限于远探测声反射成像测井的井孔声场或者浅海低频声源激发的远程海底地震波等等。

参 考 文 献

- [1] Alterman Z, Karal F C. Propagation of elastic waves in layered media by finite difference methods[J]. Bulletin of the Seismological Society of America, 1968, 58(1): 367-398.
- [2] Berenger J P. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves[J]. Journal of Computational Physics, 1994, 114(2): 185-200.
- [3] Yang H X, Wang H X. A study of damping factors in perfectly matched layers for the numerical simulation of seismic waves[J]. Applied Geophysics, 2013, 10(1): 63-70.
- [4] Marfurt K J. Accuracy of finite-difference and finite element modeling of the scalar and elastic wave equation[J]. Geophysics, 1984, 49(4): 533-549.
- [5] Clayton R, Engquist B. Absorbing boundary conditions for acoustic and elastic wave equations[J]. Bulletin of the Seismological Society of America, 1977, 67(6): 1529-1540.
- [6] Liao Z P, Wong H L, Yang B P, et al. A transmitting boundary for transient wave analysis[J]. Science in China, Ser A, 1984, 27(10): 1063-1076.
- [7] Higdon R L. Numerical absorbing boundary conditions for the wave equation[J]. Mathematics of Computation, 1987, 49(179): 65-90.
- [8] Bécache E, Fauqueux S, Joly P. Stability of perfectly matched layers, group velocities and anisotropic waves[J]. Journal of Computational Physics, 2003, 188(2): 399-433.
- [9] Meza-Fajardo K C, Papageorgiou A S. A non-convolutional split-field, perfectly matched layer for wave propagation in isotropic and anisotropic elastic media: stability analysis[J]. Bulletin of the Seismological Society of America, 2008, 98(4): 1811-1836.
- [10] Zeng C, Xia J, Miller R D, et al. An improved vacuum formulation for 2D finite-difference modeling of Rayleigh waves including surface topography and internal discontinuities[J]. Geophysics, 2012, 77(1): T1-T9.
- [11] 唐晓明, 魏周拓. 声波测井技术的重要进展——偶极横波远探测测井[J]. 应用声学, 2012, 31(1): 10-17.
Tang Xiaoming, Wei Zhoutuo. Significant progress of acoustic logging technology: remote acoustic reflection imaging of a dipole acoustic system[J]. Applied Acoustics, 2012, 31(1): 10-17.