

◇ 汪承灏院士八十生辰学术论文 ◇

## 平面行波场中多个粒子受到的声辐射力\*

惠铭心<sup>1</sup> 刘晓宙<sup>1†</sup> 刘杰惠<sup>1</sup> 何爱军<sup>2</sup> 张古田<sup>3</sup> 章强<sup>4</sup>

(1 近代声学教育部重点实验室 南京大学声学所 南京 210093)

(2 南京大学电子科学与工程系 南京 210023)

(3 南京大学医学院附属鼓楼医院 南京 210008)

(4 南京大学学报 南京 210093)

**摘要** 从粒子在行波场中的声散射出发,研究当声场中存在稀疏分布的多个粒子时粒子受到的声辐射力,并且给出了适用于声场中任意位置的粒子声辐射力计算公式。由于声辐射力为非线性力,当声场中存在多个粒子时,直接计算粒子受到的声辐射力非常复杂。结果表明,当声场中存在多个稀疏分布的粒子时,这一多粒子系统可以视为多个单独的双粒子系统的叠加,只需要分别计算各个双粒子系统的声辐射力就可以通过叠加得到声场中任意粒子的声辐射力。这一结果有助于利用声辐射力对微小粒子进行精细操控。

**关键词** 行波,声辐射力,长距离,多个粒子

中图分类号: O424

文献标识码: A

文章编号: 1000-310X(2018)01-0106-08

DOI: 10.11684/j.issn.1000-310X.2018.01.016

## The acoustic radiation force of multiple particles in plane wave field

HUI Mingxin<sup>1</sup> LIU Xiaozhou<sup>1</sup> LIU Jiehui<sup>1</sup> HE Aijun<sup>2</sup> ZHANG Gutian<sup>3</sup> ZHANG Qiang<sup>4</sup>

(1 Key Laboratory of Modern Acoustics, MOE, and Institute of Acoustics, Nanjing University, Nanjing 210093, China)

(2 School of Electronic Science and Engineering, Nanjing University, Nanjing 210023, China)

(3 Nanjing Drum Tower hospital, The Affiliated Hospital of Nanjing University Medical School, Nanjing 210008, China)

(4 Journal of Nanjing University, Nanjing 210093, China)

**Abstract** In this paper, we study the acoustic radiation force of the particles when there are sparsely distributed particles in sound field, give the formula for calculating the acoustic radiation force of the particles in any position in sound field and make the simulation. Since the acoustic radiation force is nonlinear, it's very complicated for us to calculate the acoustic radiation force directly. Our calculation results show that when the sound field contains multiple sparsely distributed particles, the multi-particle system can be decomposed into several independent two-particle systems. Only need to calculate the acoustic radiation force of each two-particle system respectively, we can get the radiation force of any particle by superposition. These results will help to fine control the microparticles with acoustic radiation force.

**Key words** Plane traveling wave, Acoustic radiation force, Long range, Multiple particles

2017-10-29 收稿; 2017-12-18 定稿

\*国家自然科学基金项目 (11774167), 声场声信息国家重点实验室开放课题研究基金 (SKLOA201609)

作者简介: 惠铭心 (1994-), 男, 江苏无锡人, 本科生, 研究方向: 物理声学与非线性声学。

† 通讯作者 E-mail: xzliu@nju.edu.cn

## 1 引言

随着科学技术的发展,在医疗卫生、生物工程等方面,人们越来越需求于对微小粒子的准确操控,比如细胞、原子等。自从A. Ashkin提出光学捕获法并成功研究出光镊子后<sup>[1-2]</sup>,光镊子被广泛应用于无创性动态控制微粒,在工业工程和科学研究方面均有极大作用。但光镊子很容易受到外界光线的影响,工作时需要较为苛刻的外部环境,同时光镊子对样品的透光性要求很高,这些问题在一定程度上限制了光镊子的使用。1989年,M. M. Burns等人观察到在两个聚苯乙烯球之间存在由于光学效应造成的结合态<sup>[3]</sup>,与必须要由外部场的梯度造成的光学捕获不同,即使在没有梯度的平面波场中也会发生光学结合效应,这种粒子与粒子之间的相互作用为光镊子的进一步研发与完善提供了新的思路。

同样的,声波也能造成这种粒子间的相互作用<sup>[4-5]</sup>。声波具有一定的能量和动量,当声波在介质中传播且遇到物体表面时,会发生散射、折射和吸收。考虑到声的非线性,在物体表面存在一个非零的压力,称为声辐射压力,一般情况下这个辐射力非常小以至于可以忽略,但当声强足够高时,人们可以通过声辐射力来实现对粒子的声操控。但目前大多数对声辐射力的研究只集中在单个或两个在声场中特定位置的粒子所受的声辐射力<sup>[6-9]</sup>,而对于声场中存在多个粒子的情况研究很少,2016年,刘正猷教授等研究了驻波声场中存在位于同一波节,波腹特殊位置的多个粒子情况下粒子受到的声辐射力<sup>[10]</sup>。

本文从声场散射入手,研究存在多个粒子的平面行波场中粒子受到的声辐射力,推导出空间中稀疏分布的粒子(粒子之间相距较远)声辐射力的通用表达式,并给出了仿真结果。此研究有助于利用声辐射力实现对微小粒子的声学操控。

## 2 理论推导

如图1所示,平面行波声场中存在多个球形粒子,这些粒子球完全相同,入射声波方向为 $z$ 正方向,以其中的两个粒子 $n$ 和 $q$ 为例,它们之间的距离为 $d$ ,并且 $z$ 坐标差值为 $d_z$ , $\mathbf{r}_{nq}$ 为从 $n$ 指向 $q$ 的向量,在球坐标系下 $n$ 和 $q$ 的位置可以分别表示为 $\mathbf{r}_n = (r_n, \theta_n, \varphi_n)$ 和 $\mathbf{r}_q = (r_q, \theta_q, \varphi_q)$ ,同样的 $\mathbf{r}_{nq}$ 可以表示为 $\mathbf{r}_{nq} = (d, \theta_{nq}, \varphi_{nq})$ 。声场中粒子球 $n$ 的入

射速度势和散射速度势可以分别表示为

$$\phi_{i,n} = e^{-i\omega t} \sum_{lm} a_{l,m}^n j_l(kr_n) Y_{l,m}(\theta_n, \varphi_n), \quad (1)$$

$$\phi_{s,n} = e^{-i\omega t} \sum_{lm} b_{l,m}^n h_l^{(1)}(kr_n) Y_{l,m}(\theta_n, \varphi_n), \quad (2)$$

其中,  $\sum_{lm} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l$ ,  $k$ 为声场中声波的波数, $j_l$ 和 $h_l^{(1)}$ 分别为球贝塞尔函数和球汉克尔函数, $Y_{l,m}(\theta, \varphi)$ 为归一化球谐函数且可以由勒让德函数表示 $Y_{l,m}(\theta, \varphi) = \zeta_l P_l^m(\cos\theta) e^{im\varphi}$ ,其中 $\zeta_l = (-1)^m \sqrt{[(2l+1)(l-m)!]/[4\pi(l+m)!]}$ , $P_l^m(\cos\theta)$ 为 $l$ 阶连带勒让德函数。 $a_{l,m}^n$ 为与粒子 $n$ 的入射速度势相关的入射系数,它由两部分组成,第一部分是由声场中的入射声波产生的,第二部分是空间中除 $n$ 外其余粒子产生的散射波在 $n$ 处产生的,所以 $a_{l,m}^n$ 可以表示为

$$a_{l,m}^n = a_{l,m}^{n(0)} + \sum_{q \neq n} a_{l,m}^{n(q)}. \quad (3)$$

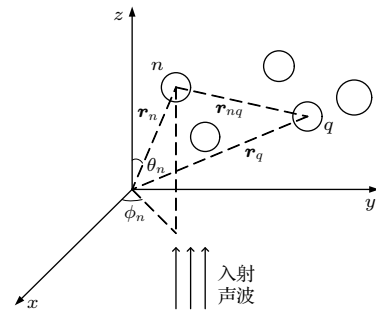


图1 在平面声场中存在多个稀疏分布的粒子球,这些粒子球完全相同

Fig. 1 There are several sparsely distributed particles in plane traveling sound field, all of them are identical

若声场中只有两个粒子存在,则 $a_{l,m}^n = a_{l,m}^{n(0)} + a_{l,m}^{n(q)}$ 。对于由平面行波场产生的入射系数 $a_{l,m}^{n(0)}$ ,这部分系数只与外部声场以及粒子 $n$ 本身有关,可以表示为<sup>[11]</sup>

$$a_{l,m}^{n(0)} = \phi_0 i^l \sqrt{4\pi(2l+1)} e^{-ikz_n} \delta_{m,0}, \quad (4)$$

其中: $\phi_0$ 为入射平面行波速度势幅值, $z_n$ 为粒子 $n$ 的 $z$ 方向坐标, $\delta_{m,m'}$ 为克罗尼克函数(Kronecker delta),满足 $\delta_{m,m'} = \begin{cases} 0, & m \neq m' \\ 1, & m = m' \end{cases}$ 。所以,显然地,

只有当 $m = 0$ 时 $a_{l,m}^{n(0)}$ 才能得到非0的值。同样的,对于粒子 $q$ 而言,

$$a_{l,m}^{q(0)} = \phi_0 i^l \sqrt{4\pi(2l+1)} e^{-ik(z_n+d_z)} \delta_{m,0}. \quad (5)$$

第二部分由除  $n$  外其他粒子散射产生的系数  $a_{l,m}^{n(q)}$  可以由球面函数的加法定理得到 [12]

$$a_{l,m}^{n(q)} = \sum_{l'm'} b_{l',m'}^q G_{l,m,l',m'}^{nq}, \quad (6)$$

其中,

$$\begin{aligned} & G_{l,m,l',m'}^{nq} \\ &= 4\pi \sum_{l''} i^{l+l''-l'} C_{l,m,l'',(m'-m)}^{l'm'} h_{l''}(kr_{nq}) \\ & \quad \times Y_{l'',m'-m}(\theta_{nq}, \varphi_{nq}), \\ & C_{l,m,l'',(m'-m)}^{l'm'} \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi Y_{l',m'}(\theta, \varphi) Y_{l,m}^*(\theta, \varphi) \\ & \quad \times Y_{l'',m'-m}^*(\theta, \varphi) \sin\theta d\theta d\varphi, \quad (7) \end{aligned}$$

其中  $h_{l''}(kr_{nq})$  为  $l''$  阶球汉克尔函数, 当  $kr_{nq} \gg 1$  时  $h_{l''}(kr_{nq})$  存在以下近似

$$h_{l''}(kr_{nq}) = \frac{(-i)^{l''} e^{ikr_{nq}}}{ikr_{nq}} + O\left(\frac{1}{r_{nq}}\right).$$

由于粒子球的声散射, 散射系数  $b_{l,m}^n$  和  $a_{l,m}^n$  之间存在一个简单的对应关系, 即  $b_{l,m}^n = A_l a_{l,m}^n$ ,  $A_l$  为粒子球的散射因子, 因为声场中粒子球完全相同, 此处各个粒子球的散射因子也相同, 所以式 (6) 可以

表示为

$$a_{l,m}^{n(q)} = \sum_{l'm'} A_{l'} \left( a_{l',m'}^{q(0)} + \sum_{q' \neq q} a_{l',m'}^{q(q')} \right) G_{l,m,l',m'}^{nq}. \quad (8)$$

假设介质中粒子稀疏分布, 也就是两个粒子之间的距离足够远, 即满足  $kr_{nq} \gg 1$ , 那么其余粒子的散射波可以视为一个小量, 若高阶小量不予考虑的话, 式 (8) 可以用一个更简单的式子来代替:

$$a_{l,m}^{n(q)} = \sum_{l'm'} A_{l'} a_{l',m'}^{q(0)} G_{l,m,l',m'}^{nq}. \quad (9)$$

声辐射力为一个周期内粒子的平均辐射应力张量  $\langle \vec{S} \rangle$  对整个表面  $S$  的积分 [12]:

$$F^n = \oint_S \langle \vec{S} \rangle dS, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \langle \vec{S} \rangle &= - \left( \frac{\rho_0 |v|^2}{4} - \frac{|p|^2}{4\rho_0 c_0^2} \right) \vec{I} + \frac{1}{2} \rho_0 \text{Re}(v^* v) \\ &= \rho_0 \left[ \frac{1}{4} \nabla^2 |\phi|^2 \vec{I} - \frac{1}{2} \text{Re}(\nabla \phi \nabla \phi^*) \right], \quad (11) \end{aligned}$$

其中  $\rho_0, c_0$  分别是声场中介质的密度和声速,  $v, p, \phi$  分别为粒子球表面的流体速度、压强和速度势。

粒子  $n$  受到的声辐射力可以视为  $x, y, z$  3 个方向的力的集合, 即  $\mathbf{F}^n = (F_x^n, F_y^n, F_z^n)$ , 由于平面波方向为  $z$  正方向,  $F_x^n, F_y^n, F_z^n$  的值分别为 [13-15]

$$\begin{aligned} F_x^n + iF_y^n &= \frac{i\rho_0}{4} \sum_{lm} \left[ \mu_{l+1,m-1} (2b_{l+1,m+1}^n b_{l,m}^{n*} + b_{l+1,m-1}^n a_{l,m}^{n*} + a_{l+1,m-1}^n b_{l,m}^{n*}) \right. \\ & \quad \left. + \mu_{l+1,-m-1} (2b_{l,m}^n b_{l+1,m+1}^{n*} + b_{l,m}^n a_{l+1,m+1}^{n*} + a_{l,m}^n b_{l+1,m+1}^{n*}) \right], \quad (12) \end{aligned}$$

$$F_z^n = \frac{\rho_0}{2} \text{Im} \left[ \sum_{lm} \sqrt{\frac{(l-m+1)(l+m+1)}{(2l+1)(2l+3)}} T_l a_{l,m}^n a_{l+1,m}^{n*} \right], \quad (13)$$

其中  $\mu_{l,m} = \sqrt{[(l-m)(l-m-1)]/[(2l-1)(2l+1)]}$ ,  $T_l = 2A_{l+1}A_l^* + A_{l+1} + A_l^*$ 。

经过计算化简,

$$\begin{aligned} F_x^n + iF_y^n &= \sum_{q \neq n} \frac{H_{nq,\theta}}{kr_{nq}} e^{i\varphi_{nq}}, \\ H_{nq} &= -\frac{\rho_0}{2} \sum_l \sum_{l'} \left[ \mu_{l+1,-1} \text{Im} \left( T_l A_{l'} e^{-ik_0 d \cos \theta_{nq}} a_{l,0}^{n(0)*} a_{l',0}^{n(0)} e^{ikr_{nq}} M_{l+1,-1,l',0} \right) \right. \\ & \quad \left. + \mu_{l+1,0} \text{Im} \left( T_l A_{l'}^* e^{ik_0 d \cos \theta_{nq}} a_{l',0}^{n(0)*} a_{l+1,0}^{n(0)} e^{-ikr_{nq}} M_{l,1,l',0}^* \right) \right], \quad (14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_z^n &= \sum_{q \neq n} \frac{1}{kr_{nq}} \frac{\rho_0}{2} \text{Im} \left[ e^{ikr_{nq}} \sum_l \sqrt{\frac{(l+1)(l+1)}{(2l+1)(2l+3)}} \right. \\ & \quad \left. \times T_l \sum_{l'} \left( A_{l'}^* a_{l,0}^{n(0)} a_{l',0}^{n(0)*} e^{ik_0 d z} M_{l+1,0,l',0}^{nq*} + A_{l'} a_{l',0}^{n(0)} a_{l+1,0}^{n(0)*} e^{-ik_0 d z} M_{l,0,l',0}^{nq} \right) \right], \quad (15) \end{aligned}$$

其中

$$M_{l,m,l',0} e^{-im\varphi_{nq}} = 4\pi i^{l-l'-1} \sum_{l''} C_{l,m,l'',-m}^{l',0} Y_{l'',-m}(\theta_{nq}, \varphi_{nq}).$$

假设外部声场均匀且恒定, 赋予粒子的速度势  $\phi_0$  为常数, 为了更好地研究作用力随粒子间距离的变化趋势并且剔除  $\phi_0$  的影响, 可以考虑由声场产生的基本作用力  $F_0 = E_0 S_0$ , 其中  $E_0 = \rho_0 k^2 \phi_0^2 / 2$  是平面波的能量密度,  $S_0 = \pi D^2 / 4$  为球形粒子在声场中的横截面积,  $D$  为粒子直径, 这个作用力方向为  $z$  轴正方向, 所以在计算过程中  $z$  方向的声辐射力还需考虑由原声场产生的辐射力。

所以, 粒子球  $n$  受到的归一化声辐射力可以表示为

$$\begin{aligned} F_{xy}^{n'} &= \sum_{q \neq n} \frac{1}{F_0} \frac{H_{nq}}{2\pi(d/\lambda)}, \\ F_x^{n'} &= F_{xy}^{n'} \cos \varphi_{nq}, \\ F_y^{n'} &= F_{xy}^{n'} \sin \varphi_{nq}, \\ F_z^{n'} &= 1 + \frac{F_z^n}{F_0}, \end{aligned} \quad (16)$$

其中  $F_{xy}^{n'}$  为粒子  $n$  受到的归一化声辐射力在  $x$  方向和  $y$  方向上的合力。在之后的计算过程中  $F_x$ 、 $F_y$ 、 $F_{xy}$ 、 $F_z$  均表示归一化之后的声辐射力。

### 3 数据分析

以水浸聚苯乙烯粒子为例, 外部介质为水, 水的密度  $\rho_0 = 1000 \text{ kg/m}^3$ , 水中的声速  $c_0 = 1490 \text{ m/s}$ , 聚苯乙烯粒子的密度为  $\rho_1 = 1050 \text{ kg/m}^3$ , 纵波声速  $v_L = 2400 \text{ m/s}$ , 横波声速为  $v_T = 1150 \text{ m/s}$ 。

根据文献 [16], 可以得到行波场中弹性体的散射因子计算式为

$$A_l = \frac{\begin{bmatrix} d_1^* & d_{12} & d_{13} \\ d_2^* & d_{22} & d_{23} \\ d_3^* & d_{32} & d_{33} \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{bmatrix}}, \quad (17)$$

其中各个分量分别为

$$\begin{aligned} d_{11} &= (\rho_0/\rho_1) k_T^2 a^2 h_l^{(1)}(ka), \\ d_{12} &= -4k_L a j_l'(k_L a) + [2l(l+1) - k_T^2 a^2] \\ &\quad \times j_l(k_T a), \end{aligned}$$

$$d_{13} = 2l(l+1) [k_T a j_l'(k_T a) - j_l(k_T a)],$$

$$d_{21} = -k a h_l^{(1)'}(ka),$$

$$d_{22} = k_L a j_l'(k_L a),$$

$$d_{23} = l(l+1) j_l(k_T a),$$

$$d_{31} = 0,$$

$$d_{32} = 2 [j_l(k_L a) - k_L a j_l'(k_L a)],$$

$$d_{33} = 2k_T a j_l'(k_T a) + [k_T^2 a^2 - 2l(l+1) + 2] \times j_l(k_T a),$$

$$d_1^* = -(\rho_0/\rho_1) k_T^2 a^2 j_l(ka),$$

$$d_2^* = k a j_l'(ka),$$

$$d_3^* = 0,$$

其中  $a$  为粒子半径,  $k_L$ 、 $k_T$  分别为弹性粒子中横波与纵波的波数,  $k$ 、 $\rho_0$ 、 $\rho_1$  分别是外部介质水和弹性粒子的密度。

根据式 (17), 图 2 为水浸聚苯乙烯粒子的前四阶散射因子, 其变量为直径  $D$  和声波波长  $\lambda$  的比值, 因为散射因子的变化较大, 图 2 中用散射因子  $A_l$  的对数形式表示。

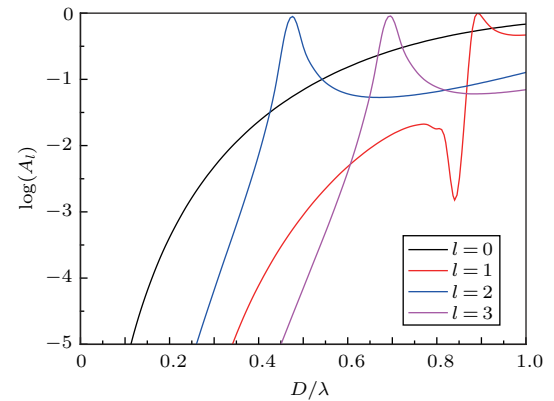


图 2 水浸聚苯乙烯粒子的前四阶散射因子示意图  
Fig. 2 Magnitudes of the lowest four orders of the scattering matrix elements for a water-immersed polystyrene particle

根据式 (16), 粒子球受到的声辐射力与粒子球之间的距离  $d$ , 声波波长  $\lambda$  以及粒子球在声场中的散射系数  $A_l$  有关。在之后的计算中用粒子球的直径与声波波长比值  $D/\lambda$  和粒子球间距离和声波波长的比值  $d/\lambda$  作为变量研究声辐射力的变化。

先考虑声场中只存在两个粒子的情况, 两个相距为  $d$ , 球坐标系下夹角为  $\theta_{nq}$ ,  $\varphi_{nq}$  的完全相同的粒子球  $n$  和  $q$ , 由图 2 中的散射因子可知, 粒子球的直

径与声波波长比值  $D/\lambda$  对声辐射力大小有着较大影响。图3是三种不同大小的粒子球  $n$  受到的声辐射力与粒子间距离的关系, 令  $\theta_{nq} = \pi/2, \varphi_{nq} = 0$ , 即两个粒子位于同一波阵面, 根据式(16), 此时  $F_x^n = F_{xy}^n, F_y^n = 0$ 。

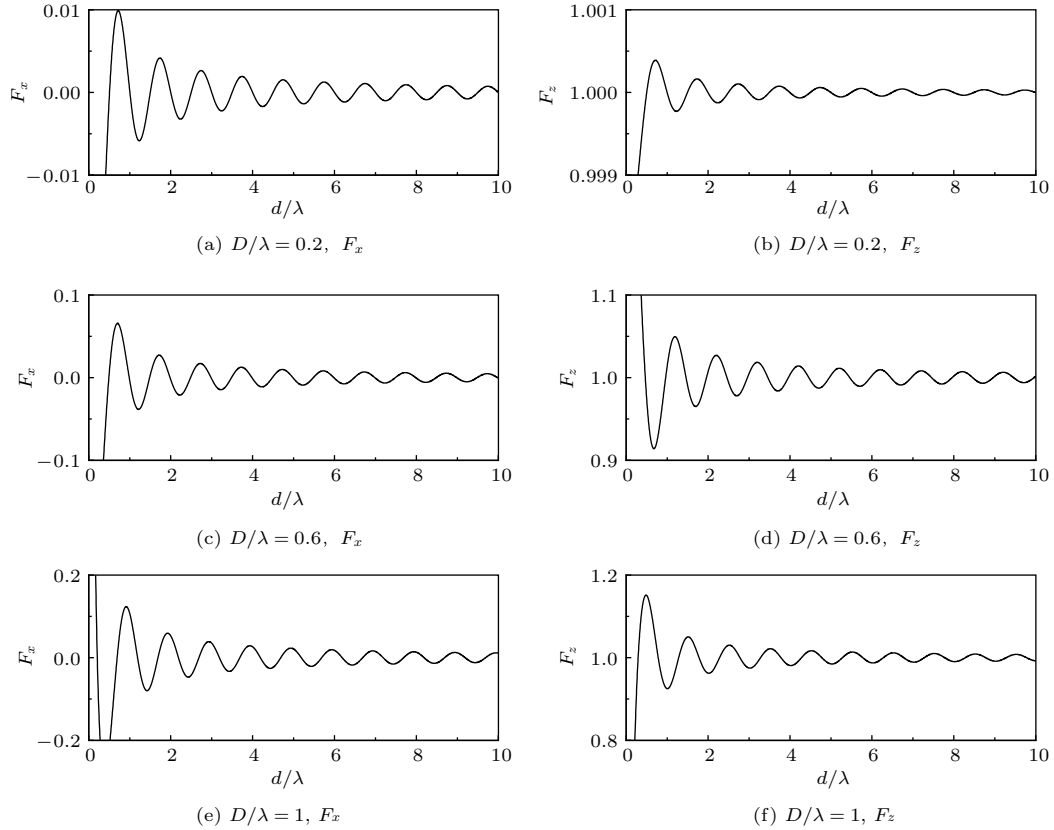


图3 三种不同大小粒子球所受的声辐射力

Fig. 3 The acoustic radiation force of three different size particles

接下来考虑粒子球大小不变而粒子球间角度发生改变的情况。当粒子球的直径  $D$  和声波波长  $\lambda$  始终满足  $D/\lambda = 0.6$ , 而两粒子球间角度  $\theta_{nq}$  发生改变时, 粒子球  $n$  和  $q$  受到的归一化声辐射力如图4所示。根据式(16),  $F_x, F_y$  的具体取值还与  $\varphi_{nq}$  有关, 故此处只考虑  $F_{xy}$  的取值。

由图3和图4的结果可知, 对于位于声场中任意位置的两个粒子球  $n$  和  $q$ , 我们只需要知道粒子大小以及两粒子间的位置关系就可以根据式(16)计算得到粒子受到的声辐射力, 由此我们还可以进一步来推断粒子在声场中的运动过程。

若声场中存在多个相距较远的球形粒子, 由式(16)可知, 对其中任意一个粒子而言, 其受到的声辐射力可以近似视为它和其他粒子两两单独存

由于在之前的计算过程中进行了  $kr_{nq} \gg 1$  的近似, 当粒子间距离较小时粒子本身体积对声辐射力影响较大, 不可忽略, 所以上计算只适用于粒子间距离较大的情况 ( $d > 2D$  且  $d/\lambda > 1$ ), 即粒子稀疏分布。

在时的声辐射力的叠加。以声场中构成正三角形的三个球形粒子为例, 同样的取  $D/\lambda = 0.6$ , 如图5所示, 假设三个粒子位于同一  $xz$  平面内, 因此粒子球间的  $\varphi_{ij} (i, j = 1, 2, 3 \text{ 且 } i \neq j)$  的取值只有 0 和  $\pi$ 。

对于粒子球1, 其各个方向受到的声辐射力如下:

$$\begin{aligned}
 F_{1,x} &= F_{12,xy}(d/\lambda, \theta_{12}) \cos \varphi_{12} \\
 &\quad + F_{13,xy}(d/\lambda, \theta_{13}) \cos \varphi_{13}, \\
 F_{1,y} &= F_{12,xy}(d/\lambda, \theta_{12}) \sin \varphi_{12} \\
 &\quad + F_{13,xy}(d/\lambda, \theta_{13}) \sin \varphi_{13}, \\
 F_{1,z} &= 1 + F_{12,z}(d/\lambda, \theta_{12}) \\
 &\quad + F_{13,z}(d/\lambda, \theta_{13}), \tag{18}
 \end{aligned}$$

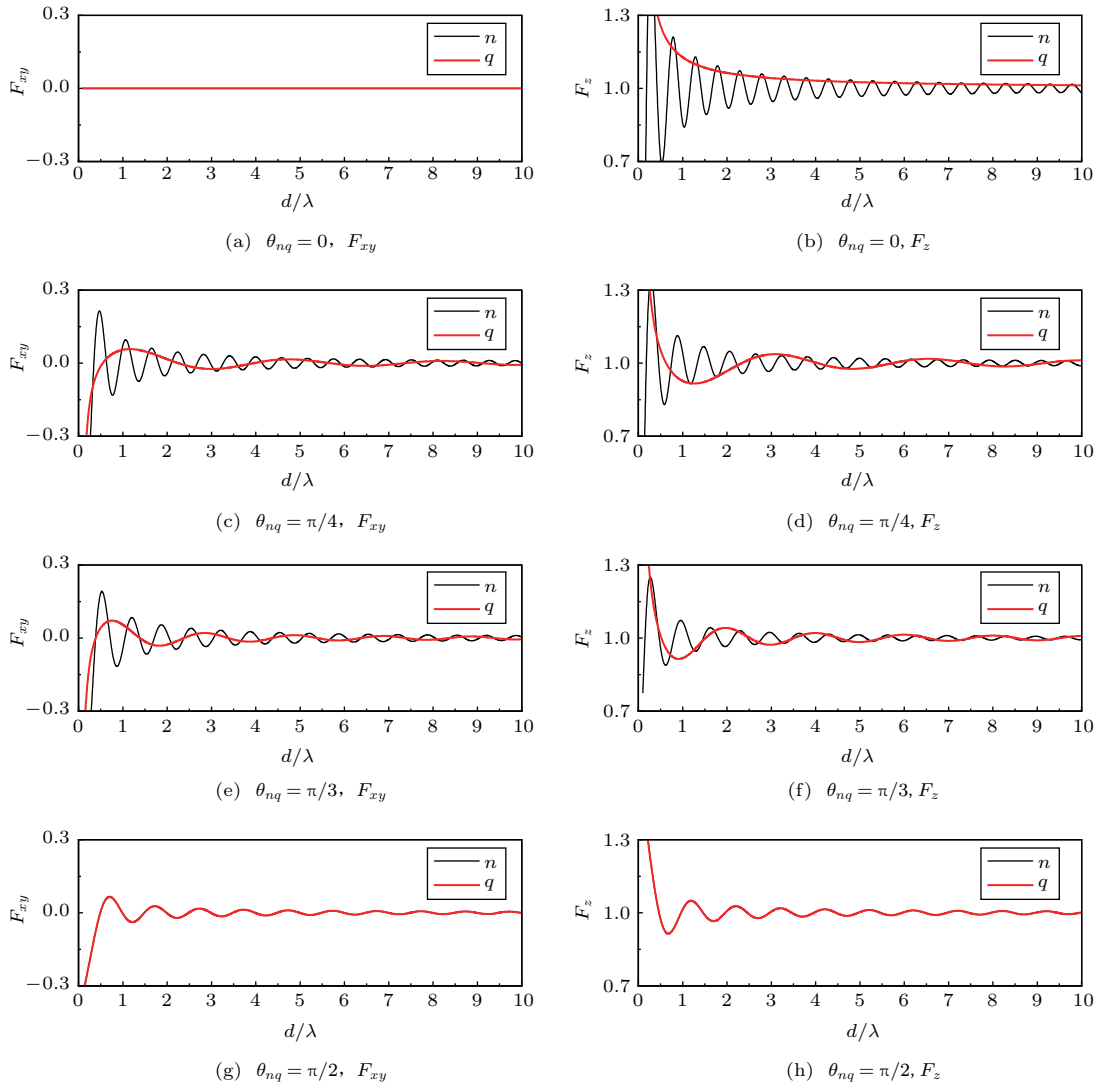


图4  $\theta_{nq}$  分别为  $0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$  时声场中两粒子球  $n, q$  所受的声辐射力

Fig. 4 The acoustic radiation force of the particles  $n$  and  $q$  when  $\theta_{nq} = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$

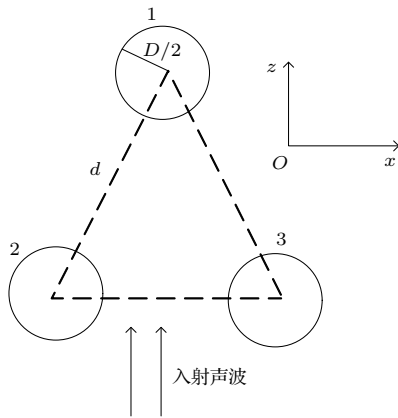


图5 在  $xz$  平面内存在三个成正三角形分布的球形粒子

Fig. 5 In  $xz$  plane, three spherical particles are distributed in equilateral triangles

其中,

$$F_{ij,xy}(d/\lambda, \theta_{ij}) = \frac{1}{F_0} \frac{H_{ij}}{2\pi(d/\lambda)},$$

$$F_{ij,z}(d/\lambda, \theta_{ij}) = \frac{F_z^n}{F_0},$$

根据几何关系, 式(18)中的各个角度分别为  $\theta_{12} = \theta_{13} = 5\pi/6, \varphi_{12} = 0, \varphi_{13} = \pi$ , 对于粒子球2、3同样存在以上类似计算关系。如图5所示, 由对称性, 声辐射力在  $y$  方向的分量始终为0, 这也与式(18)的结果相吻合。

图6为根据式(18)计算得到的各个粒子球在  $x$  和  $z$  方向的声辐射力, 从中可以看出, 在  $x$  方向, 粒子球1的声辐射力始终为0, 粒子球2、3的声辐射力大小相同方向相反, 在  $z$  方向, 粒子球2、3受到的声辐射力完全相同。所以如图5所示的三粒子球系统,

在施加了  $z$  方向的外部声场之后, 粒子1的运动只存在于  $z$  方向上, 而在  $x$  和  $y$  方向上的声辐射力始终为0. 若改变入射声波的方向, 同样的, 可以分别限制粒子2或者3的运动方向.

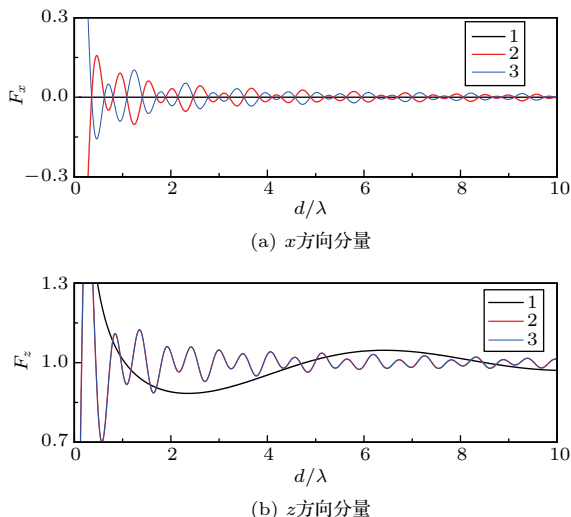


图6 图5中三个粒子球受到的声辐射力, 其中粒子球2、3在  $z$  方向的声辐射力分量相同

Fig. 6 The acoustic radiation force of the three spherical particles in Fig. 5, the radiation force of the particle 2 and 3 are the same in the  $z$ -direction

进一步考虑位于不同  $xz$  平面内的粒子, 如图7所示, 8个粒子球在空间中形成一个边长为  $d$  的正方体, 对于其中的粒子球1而言, 它同时受到其他7个粒子球的影响, 同样的, 可以表示出粒子球1受到的各个方向的声辐射力:

$$\begin{aligned}
 F_{1,x} &= \sum_{i=2}^8 F_{1i,xy}(d_{1i}/\lambda, \theta_{1i}) \cos \varphi_{1i}, \\
 F_{1,y} &= \sum_{i=2}^8 F_{1i,xy}(d_{1i}/\lambda, \theta_{1i}) \sin \varphi_{1i}, \\
 F_{1,z} &= 1 + \sum_{i=2}^8 F_{1i,z}(d_{1i}/\lambda, \theta_{1i}). \quad (19)
 \end{aligned}$$

由图7中的几何关系, 各个  $d, \theta, \varphi$  的取值如下:  $d_{12} = d_{14} = d_{15} = d, d_{13} = d_{16} = d_{18} = \sqrt{2}d, d_{17} = \sqrt{3}d, \theta_{12} = \theta_{13} = \theta_{14} = \frac{\pi}{2}, \theta_{15} = 0, \theta_{16} = \theta_{18} = \frac{\pi}{4}, \theta_{17} \approx 0.3\pi, \varphi_{12} = \varphi_{15} = \varphi_{16} = 0, \varphi_{13} = \varphi_{17} = \frac{7}{4}\pi, \varphi_{14} = \varphi_{18} = \frac{3}{2}\pi$ , 所以粒子球1受到的总的声辐射力如图8所示. 对于其余粒子球2~7, 可以用同样的方式得到它们受到的声辐射力.

对于在行波声场中其他稀疏分布的粒子球, 同样可以得到类似于式(19)的声辐射力计算公式, 这

就使得声场中多粒子系统的声辐射力简化为计算双粒子系统的声辐射力的叠加, 并且可以计算得到每个粒子受到的声辐射力. 在获得粒子受到的声辐射力的情况下, 我们可以根据粒子受力情况推测粒子球在声场中的运动, 而且可以通过改变外加声场来控制粒子球的运动.

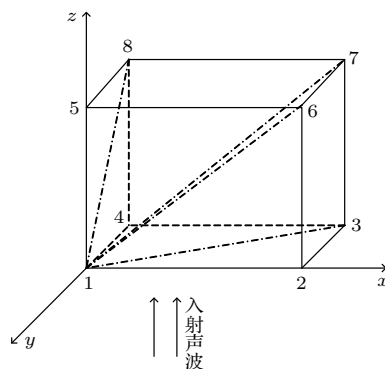


图7 在行波声场中构成正方体的八个粒子球

Fig. 7 In plane traveling wave sound field, eight spherical particles are distributed in cube

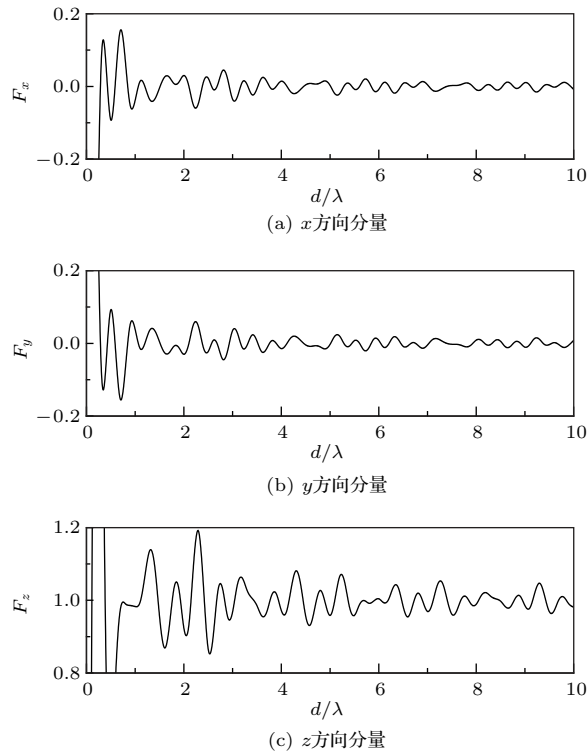


图8 粒子球1受到的声辐射力在各个方向上的分量, 取粒子球直径满足  $D/\lambda = 0.6$

Fig. 8 The acoustic radiation force of particle 1 in each direction, the diameter fulfills  $D/\lambda = 0.6$

## 4 结论

光镊子的实现以及广泛应用已经证明了对微粒进行光学操控的可行性, 由于在声场中, 粒子同样能受到声辐射力的影响, 使得声学操控成为可能。本文从球形粒子在平面行波场中的散射出发, 综合考虑声场中的入射波与散射波关系, 得到适用于行波场中存在多个稀疏分布的粒子时的声辐射力计算公式, 该公式对于行波场中任意位置的粒子均适用, 从结果可以看出, 当声场中存在多个粒子时, 每一个粒子受到的声辐射力都受到其他粒子的影响, 这个影响的大小随粒子间距离和角度的改变而发生变化。当声场中存在多个粒子并且这些粒子为稀疏分布时, 这个多粒子系统可以视为一系列双粒子系统的叠加, 只需要分别计算各个双粒子系统的声辐射力, 就可以通过叠加得到声场中任意粒子受到的声辐射力。本文对多个粒子声辐射力的研究, 将有助于更好通过声波操控微小粒子, 从而促进声镊子的进一步实现和应用。

## 参 考 文 献

- [1] Ashkin A. Acceleration and trapping of particles by radiation pressure[J]. *Phys. Rev. Lett.*, 1970, 24(4): 156–159.
- [2] Ashkin A, Dziedzic J M. Observation of a single-beam gradient force optical trap for dielectric particles[J]. *Opt. Lett.*, 1986, 11(5): 288–290.
- [3] Burns M M, Fournier J M, Golovchenko J A. Optical binding[J]. *Phys. Rev. Lett.*, 1989, 63(12): 1233–1236.
- [4] Doinikov A A. Bjerknes forces between two bubbles in a viscous fluid[J]. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1999, 106(6): 3305–3312.
- [5] Silva G T, Bruus H. Acoustic interaction forces between small particles in an ideal fluid[J]. *Phys. Rev. E.*, 2014, 90(6): 063007.
- [6] Embleton T F W. Mutual interaction between two spheres in a plane sound field[J]. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1962, 34(12): 1714.
- [7] Zheng X Y, Apfel R E. Acoustic interaction forces between two fluid spheres in an acoustic field[J]. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1995, 97(97): 2218–2226.
- [8] Doinikov A A. Bjerknes forces between two bubbles in a viscous fluid[J]. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1999, 106(6): 3305–3312.
- [9] Fan X Y, Qiu C Y, Zhang S W. Highly asymmetric interaction forces induced by acoustic waves in coupled plate structures[J]. *J. Appl. Phys.*, 2016, 118(24): 104301.
- [10] Zhang S W, Qiu C Y, Wang M D, et al. Acoustically mediated long-range interaction among multiple spherical particles exposed to a plane standing wave[J]. *New J. Phys.*, 2016, 18(11): 113034.
- [11] Colton D, Kress R. Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory[J]. Springer-Verlag, 1998, 102(9): 1601.
- [12] Liu Z Y, Chan C T, Sheng P, et al. Elastic wave scattering by periodic structures of spherical objects: theory and experiment[J]. *Phys. Rev. B.*, 2000, 62(4): 2446–2457.
- [13] Silva G T. An expression for the radiation force exerted by an acoustic beam with arbitrary wavefront[J]. *J. Acoust. Soc. Am.*, 2011, 130(6): 3541.
- [14] Silva G T, Lopes J H, Mitri F G. Off-axial acoustic radiation force of repulsor and tractor Bessel beams on a sphere[J]. *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control*, 2013, 60(6): 1207.
- [15] Lopes J H, Azarpeyvand M, Silva G T. Acoustic interaction forces and torques acting on suspended spheres in an ideal fluid[J]. *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control*, 2016, 63(1): 186–197.
- [16] Ayres V M, Gaunaud G C. Acoustic resonance scattering by viscoelastic objects[J]. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1987, 81(2): 301–311.