

纪念应崇福院士诞辰 100 周年

小快拍高分辨目标方位估计算法 GMUSIC 的性能分析*

郭拓¹ 王英民^{2†}

(1 陕西科技大学电气与信息工程学院 西安 710021)

(2 西北工业大学航海学院 西安 710072)

摘要 针对水下运动阵列在运动过程中进行方位估计时存在快拍不足的问题,研究了基于随机矩阵理论的 MUSIC 改进算法 GMUSIC,该方法通过 Stieltjes 变换建立起统计协方差矩阵真实特征值、特征向量与样本协方差矩阵之间在逼近域中的关联,以修正样本协方差特征分解的结果,进而实现小快拍方位估计。仿真与试验表明:GMUSIC 算法可以更好地分辨相邻目标,且需要的快拍数较 MUSIC 算法要少;在低信噪比情况下,GMUSIC 算法方位估计均方根误差远小于 MUSIC 算法,估计成功概率远大于 MUSIC 算法。因此,GMUSIC 算法适用于解决水声目标的小快拍方位估计问题。

关键词 方位估计,小快拍,阵列信号处理,高分辨

中图法分类号: TB566

文献标识码: A

文章编号: 1000-310X(2018)05-0781-06

DOI: 10.11684/j.issn.1000-310X.2018.05.025

Performance analysis of GMUSIC algorithm for high resolution target bearing estimation in small snapshots

GUO Tuo¹ WANG Yingmin²

(1 Shaanxi University of Science & Technology, College of Electrical & Information Engineering, Xi'an 710021, China)

(2 Northwestern Polytechnical University, School of Marine Science and Technology, Xi'an 710072, China)

Abstract When bearing estimation is done with underwater moving array, in order to solve the issue of insufficient snapshots, the performance of an improved MUSIC algorithm GMUSIC based on random matrix theory is analyzed. The GMUSIC method uses Stieltjes transformation to establish the correlation between the true eigenvalues of the statistical covariance matrix and the sample covariance matrix in the approximation domain, to correct the result of the sample covariance eigendecomposition. Simulations and experiments show that the GMUSIC algorithm can better distinguish adjacent targets and require fewer snapshots than the MUSIC algorithm. In the case of low SNR, the root mean square error of the GMUSIC algorithm is much smaller than that of the MUSIC algorithm. The probability of success is much greater than the MUSIC algorithm. Therefore, the GMUSIC algorithm is suitable for solving the problem of position estimation of small snapshots of underwater acoustic targets.

Key words Bearing estimation, Small snapshot, Array signal processing, High resolution

2018-06-14 收稿; 2018-08-24 定稿

*国家自然科学基金项目 (61671378)

作者简介: 郭拓 (1986-), 男, 陕西志丹人, 博士, 研究方向: 阵列信号处理, 目标方位估计。

† 通讯作者 E-mail: ywang@nwpu.edu.cn

1 引言

通常情况下,不管是采用电磁波探测的雷达系统,还是采用声波探测的声呐系统,它们都具有目标测向与测距这两个基本功能。目标测向也称为目标方位估计,它是阵列信号处理的主要研究内容之一。基于阵列的目标方位估计技术经过几十年的发展,取得了长足的进步。最早的方位估计方法常规波束形成(Conventional beamforming, CBF)^[1]要追溯到二战时期,其思路很简单,就是设法选取一个适当的加权向量以补偿同一信号到达各个阵元上的传播时延,以使得某一个方向上的来波到达阵列各个阵元时是同相位的,然后对各阵元信号同相求和,进而在该方向上产生一个空间响应的极大值。CBF的本质是时频域的离散傅里叶变换在空域上的应用,故其分辨能力受制于阵列瑞利(Rayleigh)的限制,因此其方位分辨性能有限,迫切需要发展高分辨的方位估计方法。

随着科学技术的进步及各种新理论的引入以及研究角度的变换,高分辨方位估计技术不断涌现。时至今日,高分辨技术波达方向(Direction of arrival, DOA)估计技术的发展可以分为四个阶段:第一阶段为线性预测类算法,典型的有Pisarenko谐波分析法^[2]、Burg最大熵法(Maximum entropy method, MEM)^[3]、最小方差无失真响应(Minimum variance distortionless response, MVDR)波束形成^[4]等;第二阶段为子空间类算法,如多重信号分类(Multiple signal classification, MUSIC)^[5]算法、旋转不变子空间(Estimation of signal parameters via rotational invariance techniques, ESPRIT)^[6]等算法;第三阶段为子空间拟合类算法,比较有代表性的算法有最大似然(Maximum likelihood, ML)^[7-8]算法、加权子空间拟合(Weighted subspace fitting, WSF)^[9-10]算法、多维MUSIC(Multidimensional MUSIC)^[11]算法等;第四阶段为近年来蓬勃发展的基于压缩感知与稀疏重构的方法^[12-17]。

传统方法CBF以及经典高分辨方法MUSIC与ESPRIT等都需要首先使用足够多的快拍来构造样本协方差矩阵,并以样本协方差矩阵代替统计协方差矩阵进行方位估计。然而,当阵列在运动过程中对目标方位进行估计,如UUV尾部拖曳阵与鱼雷头部共形阵,此时由于水声信号的时变特性,在

局部平稳过程中所能获得的样本数较少,估计所得的统计协方差矩阵误差较大,会导致MUSIC等高分辨方位估计算法性能下降,甚至失效。因此迫切需要研究小快拍情形下的高分辨方位估计算法,基于随机矩阵理论(Random matrix theory, RMT)的MUSIC改进算法GMUSIC^[18-19]算法就是近几年提出的典型算法,本文将对该算法的性能进行分析。

2 基于随机矩阵理论的MUSIC改进算法GMUSIC

2.1 阵列接收信号模型

如图1所示,水平线阵由等间隔布置的 N 个阵元组成,假设有 D 个相互独立的平面波从正横方向入射,取值范围为 $-90^\circ \sim 90^\circ$,阵列第 k 次快拍 $\mathbf{X}(k)$ 为

$$\mathbf{X}(k) = \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{S}(k) + \mathbf{N}(k), \quad (1)$$

式(1)中: $\mathbf{X}(k) = [\mathbf{x}_1(k), \mathbf{x}_2(k), \dots, \mathbf{x}_N(k)]^T$; $\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})$ 为阵列流形矩阵, $\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}) = [\mathbf{a}(\theta_1), \mathbf{a}(\theta_2), \dots, \mathbf{a}(\theta_D)]$, θ_i 为第 i 个平面波的水平入射角, $\mathbf{a}(\theta_i) = [1, e^{j2\pi d \sin(\theta_i)/\lambda}, \dots, e^{j2\pi(N-1)d \sin(\theta_i)/\lambda}]$ 为第 i 个入射平面波的导向向量, d 为阵元间距(为波长 λ 的一半); $\mathbf{S}(k) = [\mathbf{s}_1(k), \mathbf{s}_2(k), \dots, \mathbf{s}_D(k)]^T$, $\mathbf{s}_i(k)$ 为第 i 个平面波信号的第 k 次快拍; $\mathbf{N}(k) = [\mathbf{n}_1(k), \mathbf{n}_2(k), \dots, \mathbf{n}_N(k)]$ 为阵列接收到的加性高斯白噪声, $\mathbf{n}_i(k)$ 为第 i 个阵元接收到的噪声。当信号被假设具有零均值时,阵列接收信号的统计协方差矩阵 $\mathbf{R} = E[\mathbf{X}(k) \cdot \mathbf{X}(k)^H]$,即统计协方差矩阵需要通过求集总平均而得到。而实际应用中只能得到有限的采样数据,如有 M 次观测样本 $\mathbf{X}(1), \mathbf{X}(2), \dots, \mathbf{X}(M)$,用这 M 个样本构造所得的样本协方差矩阵为

$$\hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{M} \sum_{t=1}^M \mathbf{X}(t)\mathbf{X}^H(t). \quad (2)$$

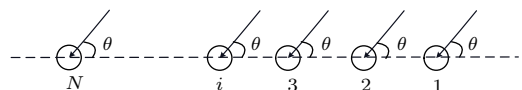


图1 阵列接收信号模型

Fig. 1 Receive signal model of array

2.2 MUSIC改进算法GMUSIC

随机矩阵就是在给定某个概率空间下,以随机变量为元素所组成的矩阵,其理论起源于20世纪20

年代的数理统计领域,是由于出现经典多元统计分析不再适用于处理大维数据的问题,标志性的工作是1928年Wishart发表的关于多元统计分析的一篇文章^[20]。随机矩阵理论是高等多元统计分析的一个数学分支,顾名思义,它是随机过程论与矩阵论的交集,其早期主要用于解决核物理等方面的问题,现在已经推广应用于无线通讯、网络安全、基因统计和金融等领域^[21]。

随机矩阵理论专注于研究各种基于不同模型随机矩阵(包括样本协方差矩阵)的特征值、特征向量以及其随着快拍数与阵元数同步变化时的逼近行为,对于固定阵元数 N 时的特殊情况,协方差矩阵 \mathbf{R} 特征值的经验谱分布函数可以表示为

$$F^{\mathbf{R}}(\lambda) = \frac{1}{N} \#\{1 \leq k \leq N : \hat{\lambda}_k \leq \lambda\}, \quad (3)$$

其中, $\#\{\cdot\}$ 表示满足某条件集合的基数,即元素个数; $F^{\mathbf{R}}(\lambda)$ 是一个特征值计数函数,它表示 \mathbf{R} 的特征值中小于等于 λ 的个数。 $\hat{F}^{\hat{\mathbf{R}}}(\lambda)$ 是样本协方差矩阵 $\hat{\mathbf{R}}$ 的经验谱分布函数,它是一个确定性的分布函数,因为其给出了样本协方差矩阵 $\hat{\mathbf{R}}$ 的特征值逼近性的描述,无论快拍数 L 如何变化, $\hat{F}^{\hat{\mathbf{R}}}(\lambda)$ 都将在逼近域中逼近于 $F^{\mathbf{R}}(\lambda)$,所以使用样本协方差矩阵的经验谱分布函数 $\hat{F}^{\hat{\mathbf{R}}}(\lambda)$ 来逼近 $F^{\mathbf{R}}(\lambda)$ 是可行的。

由于直接使用经验分布函数来描述样本协方差矩阵的逼近特征较复杂,一般通过Stieltjes变换来实现, $\hat{F}^{\hat{\mathbf{R}}}(\lambda)$ 的Stieltjes变换可定义为

$$\begin{aligned} \hat{b}_N(z) &= \int \frac{1}{\lambda - z} d\hat{F}^{\hat{\mathbf{R}}}(\lambda) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{r=1}^N \frac{1}{\hat{\lambda}_r - z} = \frac{1}{N} \text{tr}[(\hat{\mathbf{R}} - z\mathbf{I})^{-1}]. \end{aligned} \quad (4)$$

对于样本协方差矩阵 $\hat{\mathbf{R}}$, 经验谱分布函数 $\hat{F}^{\hat{\mathbf{R}}}(\lambda)$ 及其Stieltjes变换只考虑了特征值的逼近而没有将特征向量的特性融入,因此考虑如下谱函数的Stieltjes变换:

$$F_N(\lambda) = \sum_{i=1}^N \mathbf{a}^H \mathbf{q}_i \mathbf{q}_i^H \mathbf{a} \#\{\hat{\lambda} \leq \lambda\}. \quad (5)$$

公式(5)经Stieltjes变换后,通过G估计及随机矩阵理论^[22-23]得到改进的MUSIC算法,即GMUSIC^[18-19]算法,G估计的主要思想是它可以充分利用特征值与渐近区间中的真实特征值之间的联系,而GMUSIC算法的基本思路就是利用G估计的特性,通过Stieltjes变换建立起协方差矩阵真

实特征值、特征向量与样本协方差矩阵之间在逼近域中的关联。GMUSIC算法的一致方位估计器为

$$P_{\text{G-MUSIC}} = \mathbf{a}^H(\theta) \left(\sum_{i=1}^N \phi(i) \hat{\mathbf{q}}_i \hat{\mathbf{q}}_i^H \right) \mathbf{a}(\theta), \quad (6)$$

$$\phi(i) = \begin{cases} 1 + \sum_{k=N-D+1}^N \left(\frac{\hat{\lambda}_k}{\hat{\lambda}_i - \hat{\lambda}_k} - \frac{\hat{\mu}_k}{\hat{\lambda}_i - \hat{\mu}_k} \right), & i \leq N - D, \\ - \sum_{k=1}^{N-D} \left(\frac{\hat{\lambda}_k}{\hat{\lambda}_i - \hat{\lambda}_k} - \frac{\hat{\mu}_k}{\hat{\lambda}_i - \hat{\mu}_k} \right), & i > N - D, \end{cases} \quad (7)$$

其中, D 为信源个数, $\hat{\lambda}_1 < \hat{\lambda}_2 < \dots < \hat{\lambda}_N$ 与 $\hat{\mathbf{q}}_i$ 分别是样本协方差矩阵 $\hat{\mathbf{R}}$ 的特征值与特征向量。 $\hat{\mu}_k$ 是公式(8)的实值解,其中 $c = N/L$ 。

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\hat{\lambda}_i}{\hat{\lambda}_i - \mu} = \frac{1}{c}. \quad (8)$$

3 仿真及性能分析

3.1 方位分辨仿真

在仿真中,假设采用一个半波长分布的20元均匀线阵,入射的信号为两个远场窄带信号,频率分别为6.25 kHz、6.245 kHz,采样频率50 kHz,两个信号的入射角分别为16°、20°,信噪比SNR皆为20 dB,噪声为复高斯白噪声,快拍数取100。图2为使用GMUSIC算法与MUSIC对这两个相邻目标进行方位估计的结果。

由图2可知,对于两个入射方向相差为4°的相邻目标,在使用100快拍情况下,MUSIC算法不能将这两个相邻目标分辨出,而GMUSIC却可将这两个目标正确分辨出,因此,在一定程度上可以说明GMUSIC算法具有更高的方位分辨性能。

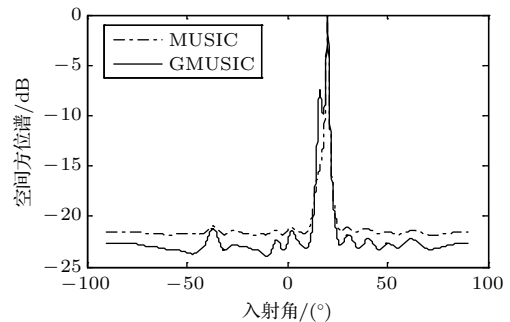


图2 GMUSIC与MUSIC方法分辨能力对比
Fig. 2 Comparison of GMUSIC and MUSIC methods

3.2 分辨性能对比

3.2.1 快拍数不同时的方位分辨性能对比

在仿真中,假设采用一个半波长分布的20元均匀线阵,入射的信号为3个远场窄带信号,频率分别为6.25 kHz、6.245 kHz、6.253 kHz,采样频率50 kHz,3个信号的入射角分别为 -40° 、 16° 、 20° ,信噪比SNR皆为20 dB,噪声为复高斯白噪声,快拍

数分别取70、80、90、100、110、120。图3为MUSIC与GMUSIC算法在不同快拍时的方位估计对比。

由图3(a)可知,MUSIC算法需要快拍数达到110才能清晰分辨 16° 、 20° 这两个相邻目标,而由图3(b)可知,GMUSIC算法可以在快拍数达到80时就可以清晰分辨这两个目标,说明与MUSIC算法相比,GMUSIC算法在较少快拍的情况下就可实现方位估计,但对快拍数的变化较敏感。

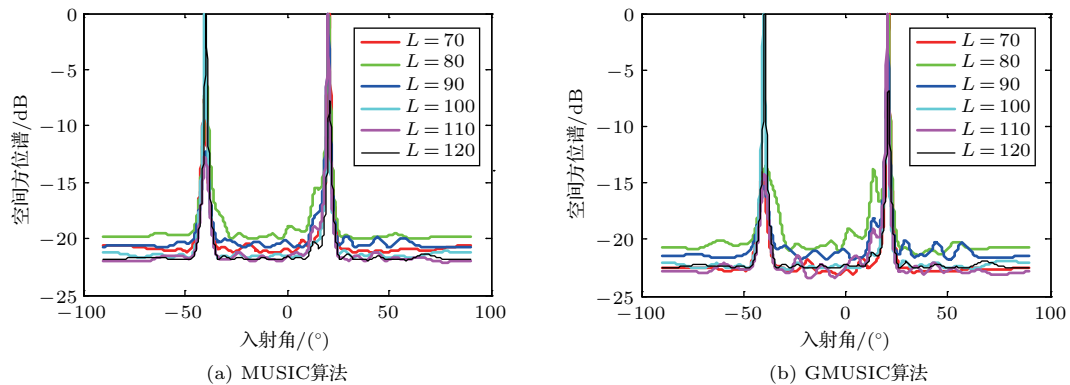


图3 MUSIC与GMUSIC算法在不同快拍时的方位估计对比

Fig. 3 Comparison of MUSIC and GMUSIC algorithms in different snapshots

3.2.2 估计均方根误差与成功概率对比

在仿真中,假设采用一个半波长分布的20元均匀线阵,入射的信号为两个远场窄带信号,频率分别为6.25 kHz、6.245 kHz,采样频率50 kHz,两个信号的入射角分别为 16° 、 20° ,信噪比SNR的范围皆为8 dB~20 dB,噪声为复高斯白噪声,快拍数分别取150、250、350。图4~图6为GMUSIC与MUSIC算法在不同快拍下,方位估计均方根误差与DOA估计成功概率随信噪比SNR变化的对比结果,估计成功概率是指角度估计成功的次数占总共Monte Carlo试验次数的比例,此处角度估计成功是指估

计所得角度与目标真实角度相差小于 1° 。

由图4~图6可知,对于不同的快拍数,随着信噪比的提高,GMUSIC算法的均方根误差都比MUSIC算法的小,且GMUSIC算法的DOA估计成功概率要比MUSIC算法的大,直至到SNR为12 dB,这是由于此时噪声太小二者基本没有差异。由图5与图6比较可知,当快拍数增大到一定数量之后,GMUSIC或MUSIC在不同快拍时的性能曲线已经变化不大,这是由于此时的样本协方差矩阵估计已经接近稳定。

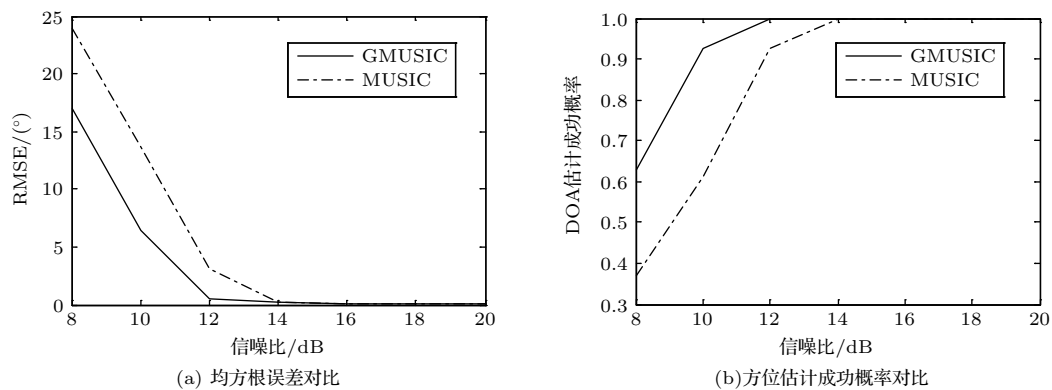


图4 GMUSIC与MUSIC算法在150快拍时的方位估计性能对比

Fig. 4 Comparison of DOA estimation performance between GMUSIC and MUSIC algorithm at 150 snapshots

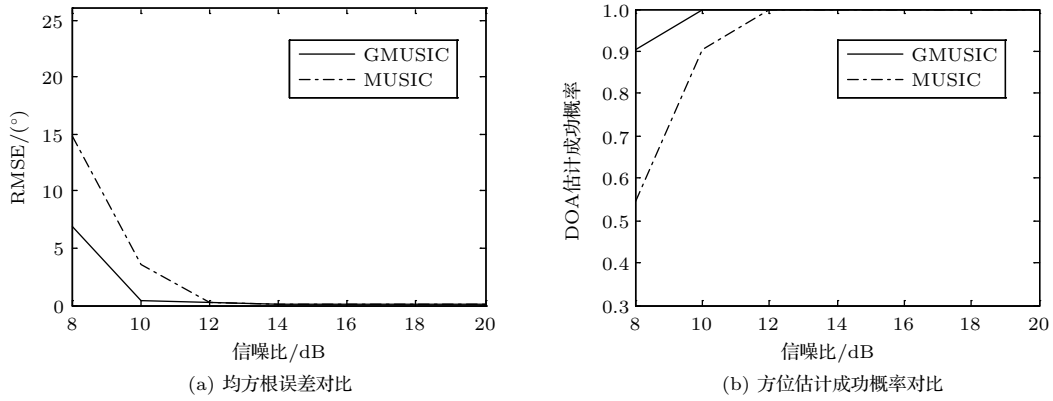


图5 GMUSIC与MUSIC算法在250快拍时的方位估计性能对比

Fig. 5 Comparison of DOA estimation performance between GMUSIC and MUSIC algorithm at 250 snapshots

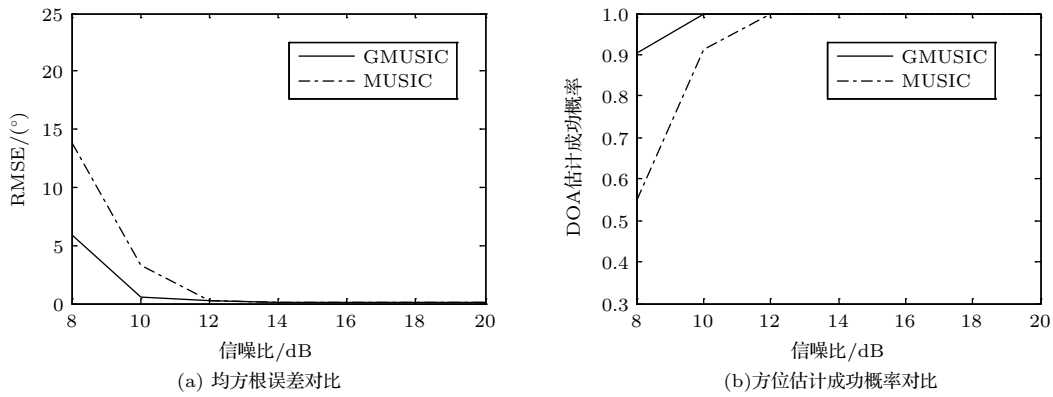


图6 GMUSIC与MUSIC算法在350快拍时的方位估计性能对比

Fig. 6 Comparison of DOA estimation performance between GMUSIC and MUSIC algorithm at 350 snapshots

4 GMUSIC算法的水池试验验证

在消声水池进行相关试验,采用由6个水听器组成的均匀线阵,阵元间距为0.12 m,水平布放于水下2.5 m深处,两个发射源所发射频率分别为6.185 kHz、6.19 kHz的CW信号,且按远场条件布

放,两个目标分别在2°、20°方向,与接收阵在同一深度,采样频率为50 kHz,快拍数取300。

图7(a)为采用MVDR算法进行方位估计的结果,图7(b)为采用GMUSIC算法与MUSIC算法得到的方位估计结果对比。

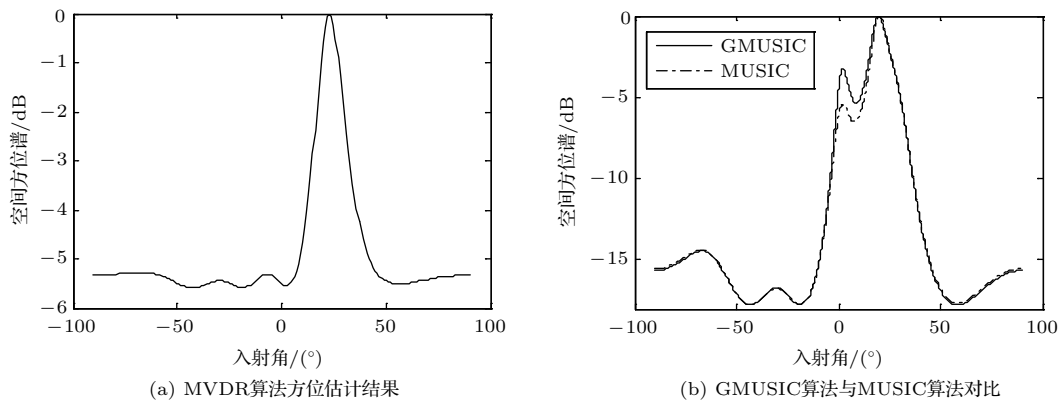


图7 水池试验高分辨方法性能对比

Fig. 7 Performance comparison of water tank test for high resolution method

由图7(a)可知, MVDR算法无法实现这两目标的分辨; 由图7(b)可知, GMUSIC算法与MUSIC算法都可将这两个目标正确分辨出, 但GMUSIC算法的性能要好于MUSIC算法。

5 结论

本文深入研究了MUSIC算法的改进算法GMUSIC, 并与MUSIC算法的性能进行了仿真分析与水池试验对比。GMUSIC算法是根据随机矩阵理论与G估计理论而提出, 由上述仿真分析与水池试验可知, 相较于MUSIC算法, GMUSIC算法有以下几个方面的优点: (1)GMUSIC算法可以更好地分辨相邻目标, 且需要的快拍数较MUSIC算法要少; (2)在低信噪比情况下, GMUSIC算法方位估计均方根误差远小于MUSIC算法, 估计成功概率远大于MUSIC算法。上述仿真分析与水池试验验证还表明, GMUSIC方法在水声信号处理中也确实可以实现小快拍方位估计, 但对快拍数的大小变化较为敏感, 在水下小尺度运动阵列的小快拍方位估计中有一定的应用价值。

参 考 文 献

- [1] Krim H, Viberg M. Two decades of array signal processing research: the parametric approach[J]. IEEE Signal Processing Magazine, 1996, 13(4): 67–94.
- [2] Kay S M, Marple S L J. Spectrum analysis—A modern perspective[J]. Proceedings of the IEEE, 1981, 69(11): 1380–1419.
- [3] Burg J P. Maximum entropy spectral analysis[C]. Oklahoma City: 37th Ann. Int. Meeting Soc. Explor. Geophys, 1967: 141–145.
- [4] Capon J. High-resolution frequency-wavenumber spectrum analysis[J]. Proceedings of the IEEE, 1969, 57(8): 1408–1418.
- [5] Schmidt R O. Multiple emitter location and signal parameter estimation[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1986, 34(3): 276–280.
- [6] Roy R, Paulraj A, Kailath T. ESPRIT—A subspace rotation approach to estimation of parameters of cisoids in noise[J]. IEEE Transactions on Acoustics Speech & Signal Processing, 1986, 34(5): 1340–1342.
- [7] Stoica P, Nehorai A. MUSIC, maximum likelihood, and Cramer-Rao bound[J]. IEEE Transactions on Acoustics Speech & Signal Processing, 1989, 37(5): 720–741.
- [8] Ottersten B, Viberg M, Stoica P, et al. Exact and large sample maximum likelihood techniques for parameter estimation and detection in array processing[M]. Berlin Heidelberg: Springer Verlag, 1993: 99–151.
- [9] Cadzow J A. A high resolution direction-of-arrival algorithm for narrow-band coherent and incoherent sources[J]. IEEE Transactions on Acoustics Speech & Signal Processing, 1988, 36(7): 965–979.
- [10] Viberg M, Ottersten B, Kailath T. Detection and estimation in sensor arrays using weighted subspace fitting[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1991, 39(11): 2436–2449.
- [11] Clergeot H, Tressens S, Ouamri A. Performance of high resolution frequencies estimation methods compared to the Cramer-Rao bounds[J]. IEEE Transactions on Acoustics Speech & Signal Processing, 1989, 37(11): 1703–1720.
- [12] Bilik I. Spatial compressive sensing for direction-of-arrival estimation of multiple sources using dynamic sensor arrays[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2011, 47(3): 1754–1769.
- [13] Kim J M, Lee O K, Ye J C. Compressive MUSIC: revisiting the link between compressive sensing and array signal processing[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2012, 58(1): 278–301.
- [14] Wang Y, Geert L, Ashish P. Direction estimation using compressive sampling array processing[C]. United Kingdom Wales Cardiff: Statistical Signal Processing, 2009. SSP'09. IEEE/SP 15th Workshop, 2009: 626–629.
- [15] Gorodnitsky I F, Rao B D. Sparse signal reconstruction from limited data using FOCUSS: a re-weighted minimum norm algorithm[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1997, 45(3): 600–616.
- [16] Cotter S F, Rao B D, Engan K, et al. Sparse solutions to linear inverse problems with multiple measurement vectors[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2005, 53(7): 2477–2488.
- [17] Malioutov D, Çetin M, Willsky A S. A sparse signal reconstruction perspective for source localization with sensor arrays[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2005, 53(8): 3010–3022.
- [18] Mestre X, Lagunas M Á. Modified subspace algorithms for DOA estimation with large arrays[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2008, 56(2): 598–614.
- [19] Mestre X. Improved estimation of eigenvalues and eigenvectors of covariance matrices using their sample estimates[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2008, 54(11): 5113–5129.
- [20] 曾杏元. 有关随机矩阵领域最新研究动态与进展的综述报告[J]. 数学理论与应用, 2011, 31(3): 7–19.
Zeng Xingyuan. A survey on the latest dynamic and progress of random matrix field[J]. Mathematical Theory and Applications, 2011, 31(3): 7–19.
- [21] 金百锁. 大维随机矩阵谱分布的极限理论研究及其应用[D]. 合肥: 中国科学技术大学, 2006: 12–30.
- [22] Girko V. An introduction to statistical analysis of random arrays[M]. The Netherlands: VSP, 1998: 40–45.
- [23] Bai Z D, Miao B Q, Pan G M. On asymptotics of eigenvectors of large sample covariance matrix[J]. The Annals of Probability, 2007, 35(4): 1532–1572.