

◇ 研究报告 ◇

一种快速有效的正弦波信号频率估计方法*

温兵会¹ 毛卫宁^{2†}

(1 东南大学网络空间安全学院 南京 210096)

(2 东南大学信息科学与工程学院 南京 210096)

摘要: 针对 I-Rife 算法和 Fang 算法计算量增大、低信噪比时性能下降的问题, 该文提出了一种快速有效的正弦信号频率精确估计方法, 利用两点细化的频谱值估计频率偏移量, 不需要判别频率修正方向, 降低了算法复杂度和计算量; 分析了频偏估计的偏差。仿真结果表明, 该算法的整体性能优于 I-Rife 算法和改进的 Fang 算法, 在保证性能的同时, 提高了算法的稳定性和实用性。

关键词: 频率估计; 频率细化; 频率修正方向; 克拉美罗界

中图法分类号: TB567 文献标识码: A 文章编号: 1000-310X(2020)04-0512-06

DOI: 10.11684/j.issn.1000-310X.2020.04.003

A fast and effective sinusoidal signal frequency estimation

WEN Binghui¹ MAO Weining²

(1 School of Cyber Science and Engineering, Southeast University, Nanjing 210096, China)

(2 School of Information Science and Engineering, Southeast University, Nanjing 210096, China)

Abstract: For the I-Rife algorithm and the Fang algorithm, the computational load is increased and the performance is low at low SNR. In this paper, a fast and effective sinusoidal signal frequency estimation method is proposed. The frequency offset is estimated by using two refined spectral values. Without discriminating the frequency correction direction that reduces the computational complexity of the algorithm. The bias of the frequency offset estimation is analyzed. The simulation results show that the overall performance of the proposed algorithm is better than the I-Rife algorithm and the improved Fang algorithm, which improves the stability and practicability of the algorithm while ensuring performance.

Keywords: Frequency estimation; Frequency refinement; Frequency correction direction; Cramer-Rao lower bound

2019-08-21 收稿; 2020-02-24 定稿

*国家自然科学基金项目(61871124), 水声技术实验室稳定支持项目(JCKYS2019604SSJSSO12), 声呐技术重点实验室基金项目(6142109KF201806)

作者简介: 温兵会(1995-), 男, 安徽宿州人, 硕士研究生, 研究方向: 水声信号处理。

†通信作者 E-mail: maoweining@seu.edu.cn

0 引言

正弦波信号的频率估计是数字信号处理领域的一个值得研究的经典课题,在声呐、雷达等领域应用广泛。采用离散傅里叶变换(Discrete Fourier transform, DFT)谱估计方法估计正弦波信号的频率是一种常用方法,由于快速傅里叶变换(Fast Fourier transform, FFT)算法的高效性,该方法在工程上得到广泛应用^[1-3]。利用FFT谱估计法进行正弦波信号频率估计的方法很多,大体上可以分为两类。一类是需要判别频率修正方向的算法,如Rife算法^[4-5]、M-Rife算法^[6]和I-Rife算法^[7]。Rife算法是正弦信号频域频率估计的经典算法,通过频谱插值对实际频率相对于谱线最大值频率的偏移量进行估计,计算量小,但是存在两个问题:一是当实际频率在谱线最大值频率附近时,频率估计误差相对较大;二是,其频率估计精度易受噪声的影响,低信噪比(Signal-to-noise ratio, SNR)时估计性能下降。M-Rife算法解决了Rife算法的第一个问题,但增加了运算量。I-Rife算法解决了Rife算法的两个问题,但进一步增加了计算量。Rife算法、M-Rife算法和I-Rife算法存在的共同问题是需要判别频率修正方向,再计算频率偏差。另一类,基于FFT的频率估计方法,不需要判别频率修正方向,直接计算频率偏差,如Candan算法^[8]、Fang算法^[9]和改进的Fang算法^[10-12]。Candan算法计算简单,但当信噪比较低时,容易出现插值方向错误,导致误差较大。Fang算法通过对信号在时域补等信号长度的零,采用FFT频谱中最大谱线相邻的两根谱线幅度估计频率偏差,提高了频率估计性能,但增加了计算量。改进的Fang算法在Fang算法基础上提高了频率估计性能,减少了计算量。Candan算法和Fang算法及其改进算法存在的共同问题是涉及到非线性函数的计算,增加了算法的复杂度。为此,本文提出了一种新的频率估计算法,在 N 点FFT运算基础上,利用两点细化的频谱值估计频率偏移量,分析了频偏估计的偏差和算法的复杂度。相比于I-Rife和改进的Fang算法,本文不需要判别频率修正方向,降低了算法计算量和复杂度。

1 问题描述

含有噪声的复正弦信号为

$$x(n) = A e^{j(2\pi n f_0 / f_s + \theta_0)} + w(n),$$

$$n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (1)$$

其中, $f_0 = (k_0 + \delta) \cdot \Delta f$ 为信号频率, $\Delta f = f_s / N$ 为频率分辨率, δ 为数字频率偏差, 取值范围在 $-0.5 \sim 0.5$ 之间, f_s 为采样频率, k_0 为数字频率; $w(n)$ 为高斯白噪声, 均值为0, 方差为 σ_n^2 ; A 和 θ_0 分别为信号幅度和初相; N 为信号长度。

对式(1)所示的信号进行 N 点DFT得到

$$X(k) = A \frac{\sin(\pi(k - (k_0 + \delta)))}{\sin(\pi(k - (k_0 + \delta))/N)} \cdot e^{j(\theta_0 - \pi(k - (k_0 + \delta))(N-1)/N)} + W(k),$$

$$k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (2)$$

式(2)中, $W(k)$ 表示高斯白噪声的DFT, 在不考虑噪声的情况下信号傅里叶变换的幅值为

$$|X(k)| = A \left| \frac{\sin(\pi(k - (k_0 + \delta)))}{\sin(\pi(k - (k_0 + \delta))/N)} \right|,$$

$$k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (3)$$

当信号的真实频率不等于频率分辨率 Δf 的整数倍时, 利用FFT估计频率存在频率偏差, 数字频率偏差 δ 取值范围在 $-0.5 \sim 0.5$ 之间, 信号的真实频率位于谱线最大值与次大值对应的频率之间。

假设信号经过 N 点FFT运算后, 频谱幅度最大值为 $|X_{k_0}|$, 对应的数字频率为 k_0 , 次大值为 $|X_{k_0+\alpha}|$ 。Rife算法利用频谱幅度的最大值和次大值估计频率偏差, 频率估计公式为^[4]

$$\hat{f}_0 = (k_0 + \delta) \Delta f$$

$$= \left(k_0 + \alpha \frac{|X_{k_0+\alpha}|}{|X_{k_0+\alpha}| + |X_{k_0}|} \right), \quad (4)$$

其中, 频率修正方向 $\alpha = \pm 1$ 。当 $|X_{k_0+1}| > |X_{k_0-1}|$ 时, $\alpha = +1$; 当 $|X_{k_0+1}| < |X_{k_0-1}|$ 时, $\alpha = -1$ 。

Rife算法计算量小,但在频偏较小时,频率估计误差增大,此外,低信噪比时估计性能下降;I-Rife算法^[7]是对Rife算法的改进,利用频谱细化技术计算谱值 $|X(k_0 \pm 0.5)|$ 作为频率修正方向的判据,利用频移技术将被估计频率移至两相邻数字频率的中心处,以确保Rife算法能够准确估计频率。I-Rife算法在一定程度上克服了Rife算法的不足,但增加了计算量;改进Fang算法(I-Fang)^[10]利用DFT计算6个频点的谱值来估计数字频率偏差,避免了Fang算法中对信号补等长度的零进行 $2N$ 点FFT运算,减少了计算量,但利用I-Fang算法进行频率

估计同样涉及到非线性函数的计算,算法复杂度较高。I-Fang算法性能与I-Rife算法接近,但计算量进一步增大,两者在很低信噪比时,依然存在性能下降和不稳定问题。

2 本文算法和偏差分析

2.1 本文算法

为了提高低信噪比时的频率估计性能,同时减小计算量,本文提出一种快速有效的频率估计方法,运用频谱细化方法计算频谱值 $|X(k_0 \pm 0.5)|$,利用这两点谱值估计数字频偏,不需要判别频率修正方向,提高了频率估计的稳定性。

根据式(3), k_0 点左右相邻两点频谱幅度的比值为

$$P_k = \frac{|X(k_0 + k)|}{|X(k_0 - k)|} = \frac{|\sin(\pi(k - \delta))|}{|\sin(\pi(k - \delta)/N)|} \cdot \frac{|\sin(\pi(k + \delta)/N)|}{|\sin(\pi(k + \delta))|}. \quad (5)$$

式(5)中由于 $(\pi(k - \delta) + \pi(k + \delta))/2 = k\pi$, 则 $|\sin(\pi(k - \delta))| = |\sin(\pi(k + \delta))|$, 假设 $\pi(k - \delta) \ll N$ 和 $\pi(k + \delta) \ll N$, 则由公式(5)可得数字频率偏差估计值:

$$\hat{\delta}_k = k - \frac{2k}{1 + P_k} = k - \frac{2k |X(k_0 - k)|}{|X(k_0 + k)| + |X(k_0 - k)|}. \quad (6)$$

当 $k = 1$ 时, 即利用FFT频谱中的 $|X(k_0 - 1)|$ 和 $|X(k_0 + 1)|$ 值来估计数字频偏 δ , 对应的表达式如下:

$$\hat{\delta} = 1 - \frac{2}{1 + P_1} = 1 - \frac{2 |X(k_0 - 1)|}{|X(k_0 + 1)| + |X(k_0 - 1)|}. \quad (7)$$

式(7)利用频谱值 $|X(k_0 - 1)|$ 和 $|X(k_0 + 1)|$ 计算数字频偏易受噪声的影响, 为了提高低信噪比下的频率估计精度, 利用频谱细化获得频谱值 $|X(k_0 - 0.5)|$ 和 $|X(k_0 + 0.5)|$, 代入式(6)得到

$$\hat{\delta} = \frac{1}{2} - \frac{1}{1 + P_{0.5}} = \frac{1}{2} - \frac{|X(k_0 - 0.5)|}{|X(k_0 + 0.5)| + |X(k_0 - 0.5)|}. \quad (8)$$

信号频率的估计值为

$$\hat{f}_0 = (k_0 + \delta)\Delta f. \quad (9)$$

本文提出的频率估计算法的流程如下:

步骤1 对采样信号进行 N 点FFT运算, 寻找幅度谱最大值对应的数字频率 k_0 。

步骤2 利用频谱细化方法计算 $|X(k_0 \pm 0.5)|$ 两点谱值。

步骤3 利用式(8)和式(9)估计信号频率。

2.2 偏差分析

本文算法得到的数字频率偏差表示式简单, 计算量小, 进一步分析表明, 还可以得到无噪声情况下频偏的偏差闭合表示式, 可用于频率偏差校正, 以进一步提高测频精度。

数字频偏 δ 估计的偏差定义为

$$b_\delta = E\{\hat{\delta}\} - \delta. \quad (10)$$

根据式(9)和式(10), 频率估计的偏差为

$$b_f = b_\delta \Delta f = \frac{f_s}{N} b_\delta. \quad (11)$$

因为数字频率偏差的偏差 b_δ 与频率偏差 b_f 之间的关系是线性的, 因此只需分析数字频偏的偏差 b_δ 。

$\sin(\pi(0.5 + \delta)/N)$ 和 $\sin(\pi(0.5 - \delta)/N)$ 是关于 δ 的函数, 对其进行泰勒级数展开, 在无噪声情况下, 根据式(8)和式(10)可得

$$b_\delta = \hat{\delta} - \delta \approx \frac{1}{6} \left(\frac{\pi}{N}\right)^2 (0.5 - \delta)^3 \frac{|X(k_0 + 0.5)|}{|X(k_0 + 0.5)| + |X(k_0 - 0.5)|} - \frac{1}{6} \left(\frac{\pi}{N}\right)^2 (0.5 + \delta)^3 \frac{|X(k_0 - 0.5)|}{|X(k_0 + 0.5)| + |X(k_0 - 0.5)|}. \quad (12)$$

有噪声时, 定义与信噪比有关的数字频偏的偏差为

$$b_\delta(\gamma) = E\{\hat{\delta}|\gamma\} - \delta, \quad (13)$$

可以证明, 至少存在一个SNR值 γ 满足 $b_\delta(\gamma) = 0$ 。证明过程如下:

根据式(8)和式(13)可得

$$b_\delta(\gamma) = 0.5E\left\{\frac{|X(k_0 + 0.5)| - |X(k_0 - 0.5)|}{|X(k_0 + 0.5)| + |X(k_0 - 0.5)|}\right\} - \delta = 0.5E(E\{Y_{+0.5}\} - E\{Y_{-0.5}\}) - \delta, \quad (14)$$

其中,

$$Y_{+0.5} = \frac{|X(k_0 + 0.5)|}{|X(k_0 + 0.5)| + |X(k_0 - 0.5)|},$$

$$Y_{-0.5} = \frac{|X(k_0 - 0.5)|}{|X(k_0 + 0.5)| + |X(k_0 - 0.5)|}.$$

根据公式(2)可得

$$\begin{aligned} & |X(k_0 + 0.5)| \\ &= \left| A e^{j(\theta_0 - \pi N / (N-1)(0.5 - \delta))} X_{+0.5} + W(k_0 + 0.5) \right| \\ &= A X_{+0.5} \sqrt{X_r^2(+0.5) + X_i^2(+0.5)}, \quad (15) \end{aligned}$$

其中, $X_{+0.5} = \sin(\pi(0.5 - \delta)) / \sin(\pi(0.5 - \delta) / N)$, $W(k_0 + 0.5)$ 表示复高斯噪声。

$$\begin{aligned} X_r(+0.5) &= \cos(\theta_0 - \pi N / (N-1)(0.5 - \delta)) \\ &\quad + \sqrt{N / (2X_{+0.5}^2 \cdot \gamma)} W_r(k_0 + 0.5), \\ X_i(+0.5) &= \sin(\theta_0 - \pi N / (N-1)(0.5 - \delta)) \\ &\quad + \sqrt{N / (2X_{+0.5}^2 \cdot \gamma)} W_i(k_0 + 0.5), \end{aligned}$$

$W_r(k_0 + 0.5) \sim N(0, 1)$ 和 $W_i(k_0 + 0.5) \sim N(0, 1)$, 因此, 可以得到包含高斯随机变量的 $|X(k_0 + 0.5)|$ 的形式为

$$\begin{aligned} & |X(k_0 + 0.5)| \\ &= A X_{+0.5} \left\{ 1 + \frac{2}{X_{+0.5}} \sqrt{\frac{N}{2\gamma}} K + \frac{1}{X_{+0.5}^2} \frac{N}{2\gamma} \right. \\ &\quad \left. \cdot [W_r^2(k_0 + 0.5) + W_i^2(k_0 + 0.5)] \right\}^{1/2}, \quad (16) \end{aligned}$$

其中, $K = \cos(\theta_0 - \pi(N-1)/N(0.5 - \delta))W_r(k_0 + 0.5) + \sin(\theta_0 - \pi(N-1)/N(0.5 - \delta))W_i(k_0 + 0.5)$ 。

当 SNR 满足 $\gamma \rightarrow 0$ 时, 根据式(16)可得

$$\begin{aligned} & |X(k_0 + 0.5)| \\ &\approx \sqrt{\frac{N}{2\gamma} (W_r^2(k_0 + 0.5) + W_i^2(k_0 + 0.5))}, \quad (17) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & |X(k_0 - 0.5)| \\ &\approx \sqrt{\frac{N}{2\gamma} (W_r^2(k_0 - 0.5) + W_i^2(k_0 - 0.5))}. \quad (18) \end{aligned}$$

可以证明 $W(k_0 + 0.5)$ 和 $W(k_0 - 0.5)$ 是不相关的。 $W_r(k_0 + 0.5)$ 、 $W_i(k_0 + 0.5)$ 、 $W_r(k_0 - 0.5)$ 和 $W_i(k_0 - 0.5)$ 不相关, 且具有相同的分布, 则根据式(17)和式(18)可得

$$E\{Y_{+0.5}\} = E\{Y_{-0.5}\}. \quad (19)$$

因此, 根据式(14)可得, $\lim_{\gamma \rightarrow 0} b_\delta(\gamma) = -\delta$ 。

另一方面, 当 SNR 取值满足 $\gamma \rightarrow +\infty$ 时, 它将近似于无噪声的情况, 根据公式(12), 偏差 $b_\delta(+\infty)$ 和 δ 有相同的符号。

$$\text{综上所述可得, } \begin{cases} \text{sgn}(b_\delta(\gamma)) = -\text{sgn}(\delta), & \gamma \rightarrow 0, \\ \text{sgn}(b_\delta(\gamma)) = \text{sgn}(\delta), & \gamma \rightarrow +\infty, \end{cases}$$

其中, $\text{sgn}(\cdot)$ 表示符号函数。如上所述, 高 SNR 和低 SNR 情况下, 偏差的正负号是相反的。因此, 存在至少一个 SNR 值 γ_0 满足 $b_\delta(\gamma_0) = 0$ 。

3 计算量与性能分析

3.1 仿真实验及性能分析

信噪比定义为 $\text{SNR} = A^2 / \sigma_n^2$, 采样频率 $f_s = 48 \text{ kHz}$, 信号长度 $N = 4800$, 频率分辨率 $\Delta f = f_s / N = 10 \text{ Hz}$, 信号频率为 $f_0 = (256 + 0.10)\Delta f / 2$ 。对于复正弦信号, 在频率、幅度、相位参数均未知的情况下频率估计的克拉美罗界 (Cramer-Rao lower bound, CRLB) [9] 为

$$\begin{aligned} \text{var}\{\hat{f}\} &\geq \text{CRLB} \\ &= \frac{6f_s^2}{4\pi^2 \cdot \text{SNR} \cdot N(N-1)}. \quad (20) \end{aligned}$$

为了验证本文算法的频率估计性能, 把本文算法与 Rife 算法 [5]、I-Rife 算法 [7]、Candan 算法 [8] 和 I-Fang 算法 [10] 进行频率估计性能比较。1000 次 Monte Carlo 仿真, 信噪比变化范围为 $-22 \sim 20 \text{ dB}$, 数字频偏 $\delta = 0.1$, 本文算法及以上几种算法的频率估计均方根误差和频率估计偏差随信噪比的变化如图 1 和图 2 所示。

图 1 和图 2 表明, 当信噪比大于 10 dB 时, 5 种算法频率估计性能接近; 信噪比小于 10 dB 时, Rife 算法的频率估计性能最差, Candan 算法性能次之, I-Rife 算法、I-Fang 算法和本文算法估计性能接近。

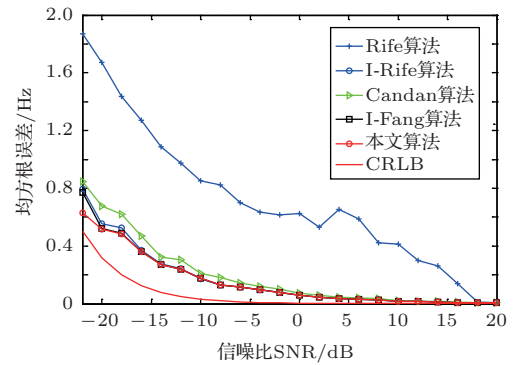


图 1 频率估计均方根误差随信噪比变化

Fig. 1 Frequency estimation root mean square error varies with SNR

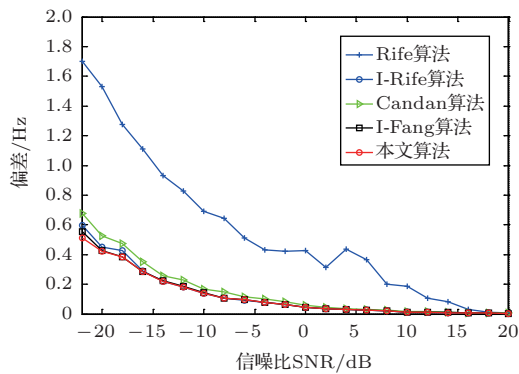
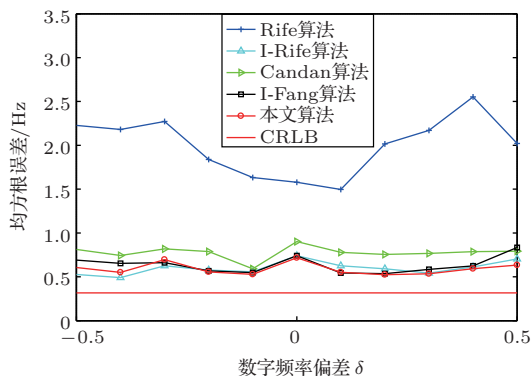


图2 频率估计偏差随信噪比变化

Fig. 2 Frequency estimation bias varies with SNR

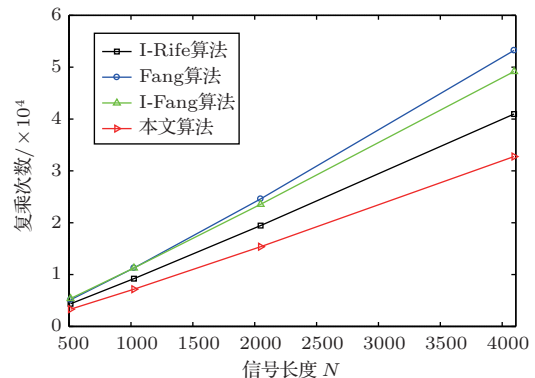
取信噪比 $\text{SNR} = -22 \text{ dB}$, 数字频率偏差变化范围为 $-0.5 \sim 0.5$, 比较5种算法频率估计的均方根误差随数字频偏的变化, 结果如图3所示。本文算法频率估计均方根误差基本上不随频偏变化, 较Rife算法有很大的改善, 性能与I-Rife算法和I-Fang算法相当。

图3 频率估计均方根误差随数字频偏 δ 变化 ($\text{SNR} = -22 \text{ dB}$)Fig. 3 Frequency estimation root mean square error varies with digital frequency offset ($\text{SNR} = -22 \text{ dB}$)

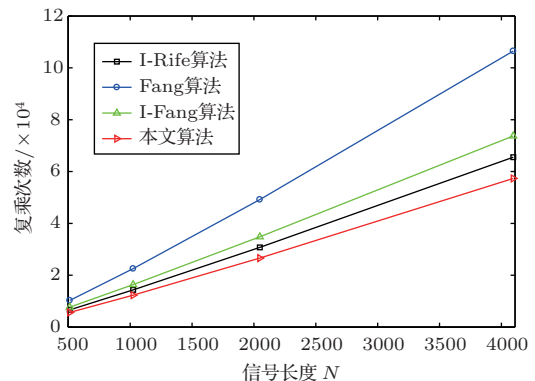
3.2 计算量分析

I-Rife算法除需要一次 N 点FFT运算外, 还要利用DFT计算4个频点的谱值。I-Rife算法共需要进行 $(N/2 \cdot \log_2 N + 4N)$ 次复数乘法和 $(N \cdot \log_2 N + 4(N-1))$ 次复数加法。Fang算法共需要进行 $N \cdot \log_2(2N)$ 次复数乘法和 $2N \cdot \log_2(2N)$ 次复数加法。本文算法要计算一次 N 点FFT和2个频点的谱值, 共需要进行 $(N/2 \cdot \log_2 N + 2N)$ 次复数乘法和 $(N \cdot \log_2 N + 2(N-1))$ 次复数加法。改进的Fang算法^[10]要计算一次 N 点FFT和6个频点的谱值, 共需要进行 $(N/2 \cdot \log_2 N + 6N)$ 次复数

乘法和 $(N \cdot \log_2 N + 6(N-1))$ 次复数加法。当 N 取不同值时, 4种算法计算量如图4所示。



(a) 复乘次数对比



(b) 复加次数对比

图4 4种算法计算量随信号长度变化

Fig. 4 The calculation amount of the four algorithms varies with the signal length

图4表明, Fang算法的计算量最大, I-Fang算法的计算量次之, I-Rife算法的计算量再次之, 本文算法的计算量最小。随着 N 取值的不断增大, 本文算法的计算量相比I-Rife算法和I-Fang算法更小, 更有优势。

4 结论

本文提出了一种利用一次 N 点FFT和两点细化的频谱值 $|X(k_0 \pm 0.5)|$ 精确估计正弦信号频率的方法, 分析了频偏估计的偏差和算法计算量。相比于I-Rife和I-Fang算法, 本文算法不需要判别频率修正方向, 算法复杂度低, 计算量小, 在保证性能的同时, 提高了算法的稳定性和实用性。综上, 本文算法的整体性能优于I-Rife算法和I-Fang算法, 是一种快速有效的频率估计方法。

参 考 文 献

- [1] 柏果, 程郁凡, 唐万斌, 等. 利用 DFT 和迭代校正的正弦信号频率估计算法[J]. 信号处理, 2017, 33(12): 1536–1541.
Bai Guo, Cheng Yufan, Tang Wanbin, et al. Sinusoidal signal frequency estimation algorithm using DFT and iterative correction[J]. Signal Processing, 2017, 33(12): 1536–1541.
- [2] 郑威, 陈德昶, 刘红星. 改进的 DFT 插值频率估计算法及其 DSP 实现[J]. 数据采集与处理, 2017, 32(3): 588–594.
Zheng Wei, Chen Dechang, Liu Hongxing. Improved DFT interpolation frequency estimation algorithm and its DSP implementation[J]. Data Acquisition and Processing, 2017, 32(3): 588–594.
- [3] 孙宏军, 王小威. 基于幅值-相角判据的修正 Rife 正弦波频率估计算法[J]. 天津大学学报(自然科学与工程技术版), 2018, 51(8): 810–816.
Sun Hongjun, Wang Xiaowei. Modified Rife sine wave frequency estimation algorithm based on amplitude-phase angle criterion[J]. Journal of Tianjin University (Natural Science and Engineering Technology Edition), 2018, 51(8): 810–816.
- [4] Rife D, Boorstyn R. Single tone parameter estimation from discrete-time observations[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 1974, 20(5): 591–598.
- [5] Rife D C, Boorstyn R R. Multiple tone parameter estimation from discrete-time observations[J]. Bell Labs Technical Journal, 1976, 55(9): 1389–1410.
- [6] 邓振淼, 刘渝, 王志忠. 正弦波频率估计的修正 Rife 算法[J]. 数据采集与处理, 2006, 21(4): 473–477.
Deng Zhenmiao, Liu Yu, Wang Zhizhong. Modified rife algorithm for sine wave frequency estimation[J]. Data Acquisition and Processing, 2006, 21(4): 473–477.
- [7] 王宏伟, 赵国庆. 正弦波频率估计的改进 Rife 算法[J]. 信号处理, 2010, 26(10): 1573–1576.
Wang Hongwei, Zhao Guoqing. Improved rife algorithm for sine wave frequency estimation[J]. Signal Processing, 2010, 26(10): 1573–1576.
- [8] Candan Ç. Analysis and further improvement of fine resolution frequency estimation method from three DFT samples[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2013, 20(9): 913–916.
- [9] Fang L, Duan D, Yang L. A new DFT-based frequency estimator for single-tone complex sinusoidal signals[C]. Military Communications Conference. IEEE, 2013: 1–6.
- [10] Liang X, Liu A, Pan X, et al. A new and accurate estimator with analytical expression for frequency estimation[J]. IEEE Communications Letters, 2016, 20(1): 105–108.
- [11] Xiang J, Shen Q, Cui W. A novel single tone frequency estimation by interpolation using DFT samples with zero-padding[C]. 2016 IEEE 13th International Conference on Signal Processing (ICSP). IEEE, 2016: 277–281.
- [12] Fan L, Qi G, He W. Accurate estimation method of sinusoidal frequency based on FFT[C]. Control Conference. IEEE, 2016: 5164–5167.