

两侧有固体层负载时板中 Lamb 波的传播

陆小冬 朱哲民 杜功焕

(南京大学声学研究所 南京 210008)

1994 年 11 月 18 日收到

摘要 本文研究了薄板二面有固体层负载时板中 Lamb 波的传播。从弹性波理论出发并结合相应的边界条件,导出了板中 Lamb 波的色散方程。数值计算表示,不管作为自由状态时板中 Lamb 波相速(板厚取定时)是大于或小于外层固体的声表面波波速,板中对称及反对称模式的 Lamb 波相速都随着外层固体层厚度增加而变化并且渐近于外层固体的声表面波波速。数值计算又表明,对很薄的板,板中对称及反对称模式的相速均随负载板的厚度呈线性变化。这二种模式都可以供传感器制作的选择。

关键词 兰姆波,相速,色散方程,固体层负载板

The propagation of Lamb waves in a plate bordered by layers on both sides

Lu Xiaodong, Zhu Zhemin and Du Gonghuan

(Institute of Acoustics, Nanjing University, Nanjing 210008)

Abstract This paper deals with the effect of solid layer loading on the two sides on the propagation of Lamb waves in a plate of finite thickness. Based on the theory of elastic wave and the boundary conditions, the dispersion equations of Lamb waves in such a plate are studied theoretically. Numerical solutions of the dispersion equations show that no matter the velocities of S_0 and A_0 mode Lamb waves of the plate of free boundary are greater or less than the velocity of Rayleigh surface wave C_r of the outer layers, the velocities of both the symmetric and antisymmetric Lamb waves asymptotically approach C_r when the thickness of the solid layers increases. Numerical computations also show that when the plate is very thin, both the velocities of S_0 and A_0 mode change approximately linearly with the solid loading layer thickness. Both these two modes may be used for a sensor.

Key words Lamb wave, phase velocity, dispersion equation, solid layers loaded plate

1 引言

自从 H. Lamb 于 1917 年发表了他的经典

性论文^[1]以后, Lamb 波被用来描述自由边界条件下薄板中传播的弹性波。如今, Lamb 波已在板状材料的缺陷及焊接质量的无损检测等

方面获得广泛应用。Victorov^[2], Farnell 和 Adler^[3]以及 Wu 和 Zhu^[4]等也对 Lamb 波的传播理论有重要的发展。

近年来,开始对 Lamb 波传感器机理进行了广泛的研究。研究表明它的传感特性比表面波还要灵敏,工作频率低,反应时间快,因而在化学、生物、环境等变化过程中的实时检测方面有良好的应用前景。

虽然最早的关于双层固体中声学性质的文章早在 60 年代中期已发表^[5]。但是随着 Lamb 波微传感器的发展以及对固体分层材料的大量运用^[6,7],对有固体负载的板中 Lamb 波的深入研究已显得日益重要。

本文从弹性波传播理论出发,研究了板两侧的对称固体层负载对板中 Lamb 波传播的影响。

2 理论

为了研究板两侧有对称固体层时对板中 Lamb 波传播的影响,选取如图 1 坐标系。板在 y 方向无限延伸,声波在 x 方向传播。薄板两面有厚度为 h 的另一种固体层与其完全接触(板和两侧固体分别用固体 I 和固体 II 表示)。板及两侧固体中纵波和横波位移势函数为 Φ ,

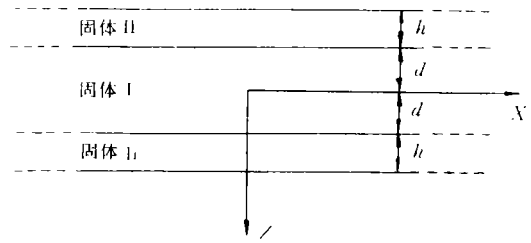


图 1 坐标示意图

和 Ψ_i 。位移的 x 和 z 分量分别为 $u_i = \frac{\partial \Phi_i}{\partial x}$ 和 $w_i = \frac{\partial \Psi_i}{\partial z}$ 。其中下标 $i = \text{I 或 II}$ 分别代表属于固体 I 和固体 II 的。如果忽略媒质中的任何耗散因素,并设声波随时间简谐变化,则位移势函数满足亥姆霍兹方程:

$$\nabla^2 \Phi_i + k_{i1}^2 \Phi_i = 0 \quad (|z| \leq d)$$

$$\nabla^2 \Psi_i + k_{i1}^2 \Psi_i = 0 \quad (|z| \leq d) \quad (1)$$

$$\nabla^2 \Phi_i + k_{i1}^2 \Phi_i = 0 \quad (d \leq |z| \leq d + h)$$

$$\nabla^2 \Psi_i + k_{i1}^2 \Psi_i = 0 \quad (d \leq |z| \leq d + h)$$

其中 k_{i1} , k_{i1} , k_{i1} 和 k_{i1} , 分别为板中纵波,横波及固体层中纵波和横波的波数。设沿 x 方向的简谐波位移势函数为:

$$\begin{aligned} \Phi_i &= [A \cosh(q_1 z) + B \sinh(q_1 z)] \exp[i(\omega t - kx)] & (-d \leq z \leq d) \\ \Psi_i &= [C \cosh(s_1 z) + D \sinh(s_1 z)] \exp[i(\omega t - kx)] & (-d \leq z \leq d) \\ \Phi_i &= [E \exp(q_1 z) + F \exp(-q_1 z)] \exp[i(\omega t - kx)] & (d \leq z \leq d + h) \\ \Psi_i &= [G \exp(s_1 z) + H \exp(-s_1 z)] \exp[i(\omega t - kx)] & (d \leq z \leq d + h) \\ \Phi_i &= [I \exp(q_1 z) + J \exp(-q_1 z)] \exp[i(\omega t - kx)] & (-(d + h) \leq z \leq -d) \\ \Psi_i &= [M \exp(s_1 z) + N \exp(-s_1 z)] \exp[i(\omega t - kx)] & (-(d + h) \leq z \leq -d) \end{aligned} \quad (2)$$

其中 k 为有固体层时板中声波沿 x 方向传播的波数, $q_1 = (k^2 - k_{i1}^2)^{1/2}$, $s_1 = (k^2 - k_{i1}^2)^{1/2}$, $q_1 = (k^2 - k_{i1}^2)^{1/2}$, $s_1 = (k^2 - k_{i1}^2)^{1/2}$ 。

波数 k 可以通过满足如下边界条件来确定。在固体与固体相接的边界 $z = d$ 和 $z = -d$ 处:

- (1) 切向应力连续 $\sigma_{xz1} = \sigma_{xz1}$;
- (2) 法向应力连续 $\sigma_{zz1} = \sigma_{zz1}$;
- (3) 切向位移连续 $u_1 = u_1$;
- (4) 法向位移连续 $w_1 = w_1$ 。在固体与真空边

界 $z = (h + d)$ 和 $z = -(h + d)$ 处: (1) 切向应力为零 $\sigma_{xz1} = 0$; (2) 法向应力为零 $\sigma_{zz1} = 0$ 。将形式解(2)代入上述边界条件,即得到关于以 $A, B, \dots, M, N$ 为未知数的 12 个线性齐次方程。在这些方程中, $A, B, \dots, M, N$ 等 12 个未知数有非零解的必要条件是方程组的系数行列式的值为零,即 $\det |A_{ij}| = 0$,通过较为复杂的运算可以简化成如下两个四行四列的行列式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = 0 \quad (3)$$

$$\begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a'_{21} & a'_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = 0 \quad (4)$$

其中 a_{ij} 及 a'_{ij} 列于附录中。方程(3)和(4)中仅左上角四元素不同, 它们分别代表对称(S模式)及反对称(A模式)Lamb波的色散方程。

如果在此二方程中令固体Ⅱ的密度 ρ_1 或厚度 h 等于零, 则方程(3)与(4)就退化为厚度为 $2d$ 的板在自由边界条件下的色散方程^[2]:

$$(k^2 + s_1^2)^2 \text{cth}(q_1 d) - 4k^2 q_1 s_1 \cdot \text{cth}(s_1 d) = 0 \quad (5)$$

$$(k^2 + s_1^2)^2 \text{th}(q_1 d) - 4k^2 q_1 s_1 \cdot \text{th}(s_1 d) = 0 \quad (6)$$

3 结果及讨论

3.1 中等厚度的板

所谓中等厚度的板为 $k_d \approx 1$ 的板。在数值计算中讨论了以下两种情况(工作频率均取为 1 MHz):

3.1.1 设自由边界时板中 A_0 与 S_0 模式 Lamb 波的相速 C_{A0}^0 与 C_{S0}^0 分别大于外层固体的声表面波波速 C_s 。计算时取板Ⅰ为铝板, 其厚度等于

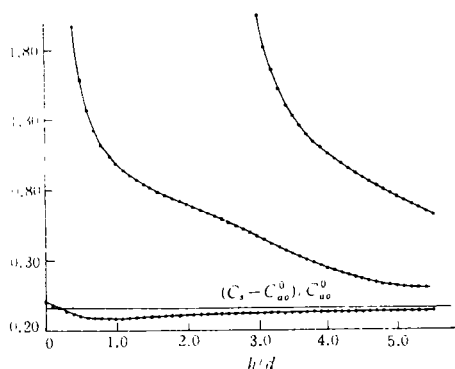


图2 A模式相速随外层固体厚度的变化

$$(C_{A0}^0 > C_s, C_{S0}^0 > C_s)$$

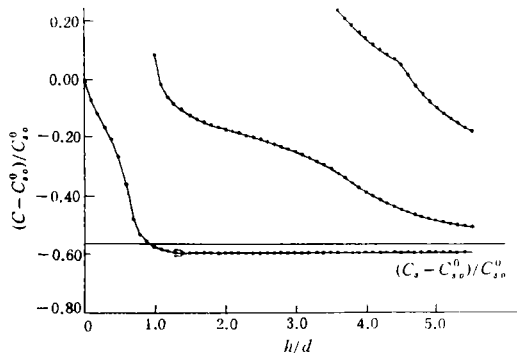


图3 S模式相速随外层固体厚度的变化

$$(C_{S0}^0 > C_s, C_{A0}^0 > C_s)$$

0.954×10^{-3} m, 密度 $\rho_1 = 2.70 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, 纵波速度 $C_{l1} = 6.40 \times 10^3 \text{ m/s}$, 横波波速 $C_{t1} = 3.00 \times 10^3 \text{ m/s}$, $C_{A0}^0 = 5.25 \times 10^3 \text{ m/s}$, $C_{S0}^0 = 2.30 \times 10^3 \text{ m/s}$ 。外层固体Ⅱ为铜, 其声表面波波速 $C_s = 2.11 \times 10^3 \text{ m/s}$, 密度 $\rho_1 = 8.90 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, 纵波波速 $C_{l1} = 4.71 \times 10^3 \text{ m/s}$, 横波波速 $C_{t1} = 2.26 \times 10^3 \text{ m/s}$ 。图2和图3是对A和S模式色散方程进行数值计算得到的色散关系曲线。数值结果显示, A模式和S模式Lamb波的相速都随外层固体的增厚而逐渐趋近于外层固体声表面波波速 C_s 。

3.1.2 设自由边界时板中 A_0 与 S_0 模式 Lamb 波的相速 C_{A0}^0 与 C_{S0}^0 分别小于外层固体的声表面波波速 C_s 。取板Ⅰ为银, 其厚度等于 0.477×10^{-3} , 密度 $\rho_1 = 1.05 \times 10^4 \text{ kg/m}^3$, 纵波速度 $C_{l1} = 3.70 \times 10^3 \text{ m/s}$, 横波波速 $C_{t1} = 1.65 \times 10^3 \text{ m/s}$, $C_{A0}^0 = 2.80 \times 10^3 \text{ m/s}$, $C_{S0}^0 = 1.20 \times 10^3 \text{ m/s}$ 。外层固体Ⅱ为钢, 其声表面波波速 $C_s = 3.05 \times 10^3 \text{ m/s}$, 密度 $\rho_1 = 7.80 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, 纵波波速 $C_{l1} = 6.10 \times 10^3 \text{ m/s}$, 横波波速 $C_{t1} = 3.30 \times 10^3 \text{ m/s}$ 。图4和图5是对A和S模式色散方程进行数值计算得到的色散关系曲线。和情况(1)相同, 当外层固体增厚时, A模式和S模式Lamb波相速都逐渐趋近于外层固体声表面波波速 C_s 。

3.2 薄板

薄板是指当满足 $k_d \ll 1$ 条件时的板。取薄

板为厚度等于 $0.954 \times 10^{-4} \text{ m}$ 的铝板, 这样满足 $k_1 d \approx 0.1$ 。外层固体为铜。数值计算结果如图 6 所示, 在板很薄及外层固体也很薄时, A_0 与 S_0 模式的相速都近似地和外层固体厚度 h 呈线性变化。

从计算的结果还可以发现板中 A_0 与 S_0 模

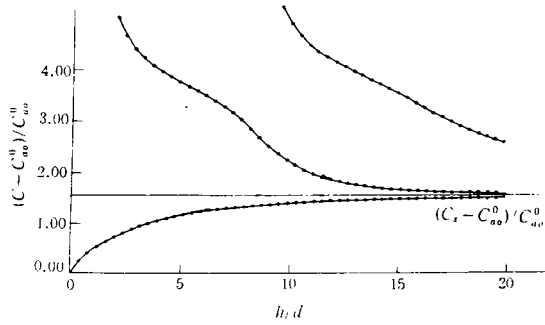


图 4 A 模式相速随外层固体厚度的变化
($C_{a0}^0 < C_s$, $C_{s0}^0 < C_s$)

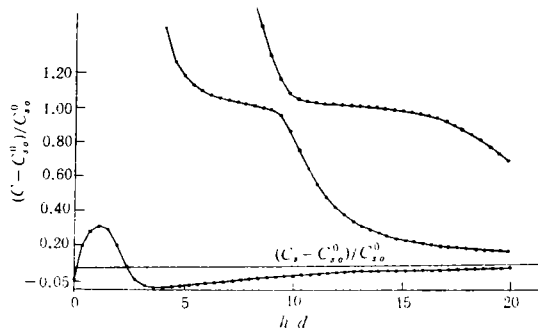


图 5 S 模式相速随外层固体厚度的变化
($C_{a0}^0 < C_s$, $C_{s0}^0 < C_s$)

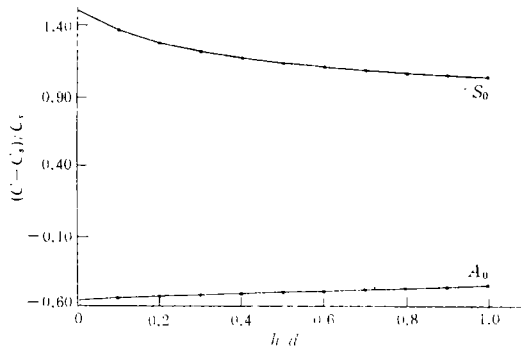


图 6 薄板相速随外层固体厚度的变化

式 Lamb 波相速对外层固体层厚度的变化都很敏感, 至于哪种模式更敏感则与两种接触材料的力学特性密切相关。这和文章[4]中得出的在板二面有等厚液体层负载时, 只有 A_0 模式较为敏感而 S_0 模式却很不敏感的结果是有所不同。这是因为当板较薄时, A_0 模式是 z 方向位移占主要地位, 而 S_0 模式是 x 方向位移占主要地位。当有液体负载时 Lamb 波能量只有通过 z 方向的位移耦合到液体中, 而对这里讨论的有良好接触的固体负载, x 方向的位移和 z 方向的位移同样重要, 都能将 Lamb 波能量耦合入固体负载中去。

4 结论

板二侧有等厚固体层负载时, 板中 Lamb 波相速都随着外层固体层厚度变化而变化。当固体负载持续增厚时, 不管自由边界时板中 C_{a0}^0 与 C_{s0}^0 是大于或小于外层固体的声表面波波速 C_s , 板中 A 和 S 模式 Lamb 波相速都渐近于外层固体的声表面波波速。当板和负载都很薄时, 板中 A_0 与 S_0 模式 Lamb 波相速与 C_s 之差的变化与外层固体厚度 h 近似成线性。由于板中 A_0 与 S_0 模式 Lamb 波相速对负载厚度的变化都敏感, 所以在 Lamb 波传感应用中不必像液体层负载那样必须选择 A_0 模式, 而可以结合具体材料来选择 A 模式或者 S 模式。

附录

$$a_{11} = (s_1^2 + k^2) \text{cth}(q_1 d)$$

$$a_{12} = -2iks_1 \text{cth}(s_1 d)$$

$$a_{21} = -ik \text{cth}(q_1 d)$$

$$a_{22} = -s_1 \text{cth}(s_1 d)$$

$$a'_{11} = (s_1^2 + k^2) \text{th}(q_1 d)$$

$$a'_{12} = -2iks_1 \text{th}(s_1 d)$$

$$a'_{21} = -ik \text{th}(q_1 d)$$

$$a'_{22} = -s_1 \text{th}(s_1 d)$$

$$a_{13} = -2iks_1 A(s_1^2 + k^2) \cosh(q_1 h) + 2iks_1 A(s_1^2 + k^2) \cosh(s_1 h)$$

$$a_{14} = A(k^2 + s_1^2)^2 \sinh(q_1 h)$$

$$\begin{aligned}
& -4k^2s_1q_1\operatorname{Asinh}(s_1h) \\
a_{23} = & -2k^2s_1\cosh(q_1h) + s_1(s_1^2 + k^2) \\
& \cdot \cosh(s_1h) \\
a_{24} = & -ik(k^2 + s_1^2)\sinh(q_1h) \\
& + 2ikq_1s_1\sinh(s_1h) \\
a_{31} = & -2ikq_1 \\
a_{32} = & -(s_1^2 + k^2) \\
a_{33} = & 4k^2s_1q_1\operatorname{Asinh}(q_1h) \\
& - A(k^2 + s_1^2)^2\sinh(s_1h) \\
a_{34} = & 2ikq_1A(s_1^2 + k^2)\cosh(q_1h) \\
& - 2ikq_1A(s_1^2 + k^2)\cosh(s_1h) \\
a_{41} = & q_1 \\
a_{42} = & -ik \\
a_{43} = & 2iks_1q_1\sinh(q_1h) \\
& - ik(k^2 + s_1^2)\sinh(s_1h) \\
a_{44} = & -q_1(s_1^2 + k^2)\cosh(q_1h) + \\
& 2k^2q_1\cosh(s_1h) \\
A = & \rho_1C_{t1}^2/\rho_1C_{t1}^2
\end{aligned}$$

参 考 文 献

- [1] H. Lamb, Proc. R. Soc. London, Ser. A93(1917), 114-120.
- [2] I. A. Viktorov, Rayleigh and Lamb Waves, Physical Theory and Applications, Plenum, New York, 1967.
- [3] G. N. Farnell and E. L. Adler, in Physical Acoustics, Principles and Methods (Eds. W. P. Mason and R. N. Thurston), Vol. 8, 1972, 35-126, Academic Press, New York.
- [4] Junru Wu and Zheming Zhu, J. Acoust. Soc. Am. 91(2) (1992), 861-867.
- [5] P. Lloyd and M. Redwood, Acoustica Vol. 16 (1965/66), 224-232
- [6] R. M. White, P. J. Wicher, S. W. Wenzel and E. T. Zellers, IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control, Vol. UFFC-34, No. 2 (1987), 162-170.
- [7] M. Hirao, H. Fukuoka, K. Fujisawa and Murayama, in Elastic Waves and Ultrasonic Nondestructive Evaluation, North-Holland, Amsterdam, 1990, 319-324.

ZP100 系列消声器通过产品鉴定

1995年12月26日由上海第二轻工业局主持对上海申华声学装备有限公司(上海红旗机筛厂)小批量生产的ZP100系列消声器通过了新产品生产鉴定。该系列消声器是华东建筑设计研究院研制成功的,主要用于各类通风空调系统的消声降噪,每米消声量达15—20 dB(A),阻力系数为0.9,具有防火、防潮、防霉、

防腐蚀、规格齐全(现有48种规格)、选用安装方便等特点。已应用于上海广播大楼、上海地铁等工程中。鉴定结论认为:ZP100系列消声器填补了市场缺口,具有国内领先水平。上海申华声学装备有限公司已具备批量生产条件。同意投入批量生产。

(中船总第九设计研究院 吕玉恒)

(上接第48页)

处的导纳函数来表示。导纳函数的矩阵表达式的解则给出交接处的力与速度。新近出现的能量有限元方法(EFEM)是对SEA法的改进,是能量流分析的有限元实现。它可对局部作用进行模拟,且可推广应用于非平面系统。其他方法还有用于对空气动力类噪声进行分析的湍流模型及混沌理论等。

3.4.3 声线跟踪法 目前声线跟踪法已对基本算法加以深化和推进,以便能够描述声扩散、散射、衍射及干涉等效应。它不仅用于室内声学,而且用于结构声学中。目前的趋势是将上述数值计算方法与其他解析模型、实验方法相混合,组成各种混合型算法,协同解决复杂的声与振动问题。