

用相速度测量数据反演单向纤维增强复合材料板的弹性常数

王小民 李明轩

(中国科学院声学研究所 北京 100080)

1997 年 6 月 6 日收到

摘要 基于横向各向同性均匀介质中平面波相速度的解析表达式, 用声速测量数据, 通过迭代阻尼最小二乘法来反演单向纤维增强复合材料板的弹性常数。数值实现中, 运用了奇异值分解 (SVD) 方法以改善计算的精度和稳定性。用模型计算的声速数据和实测的声速数据均进行了弹性常数的反演, 结果表明了反演算法是有效的。

关键词 复合材料板, 弹性常数反演, 阻尼最小二乘法, 奇异值分解

Inversion of the elastic constants of a unidirectional fiber re-inforced composite plate from ultrasonic velocity measurement data

Wang Xiaomin Li Mingxuan

(Institute of Acoustics, the Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080)

Abstract On the basis of the analytical expressions of plane waves' phase velocities in transversely isotropic homogeneous media, a method is presented to obtain the elastic constants of unidirectional fiber-reinforced composite plate from ultrasonic wave's velocity measurement data by iterative least-squares inversion. Singular Value Decomposition (SVD) approach with the Marquardt damping factor is included in computation to obtain improvement in stability and precision. Both modelling and experimental data inversion results illustrate the validity of the method.

Key words Composite plate, Elastic constants inversion, Damping least-squares method, Singular Value Decomposition

1 引言

随着人工合成结构型复合材料的出现, 弹性波在各向异性介质中的传播问题受到了人们的关注^[1-4]。人们需要研究这些材料中的声场特性, 探索适当的检测方法对材料进行检测; 或者设法得到材料的弹性常数以达到对材料力学性能进行评价之目的^[5], 这是因为, 材料的

力学性能与其弹性常数密切相关^[6], 因此, 准确地确定复合材料的弹性常数对于评价其力学性能具有十分重要的意义。为确定某种材料的弹性常数, 传统的手段是采用静力学测量, 这种测量是破坏性的, 且切变模量和非轴向杨氏模量的测量均有一定的困难^[9]。而超声检测方法是而非破坏性的, 材料的弹性常数与声波速度

有着密切而复杂的关系, 所以, 如何用超声速度测量的方法获取材料的弹性常数, 并评价其力学性能, 是超声无损检测与评价的重要课题。

在利用超声方法求取材料的弹性常数方面, Kim K Y. 等人用群速度测定方法来确定材料的弹性常数^[5]。刘小萍则用瑞利波速度测量的方法确定材料的弹性常数, 并建立了实验方法^[7]。Rokhlin S I.^[8] 证明了, 对板状体而言, 能速度测量值可作为相速度值而直接用于弹性常数的计算。因此, 许明翔和王耀俊^[9] 利用超声波速度测量方法来确定单向纤维增强复合材料板的弹性常数。

利用声速测量方法确定复合材料的弹性常数有两个关键的问题需要解决, 一个是要有可靠的测试设备和技术以保证声速测量数据的准确性; 另一个是要有精确稳定的反演算法以保证反演出的弹性常数最佳地逼近材料的真实弹性常数。本文重点讨论后一个问题。在一般各向异性复合材料的条件下, 由于没有声速的理论解析表达式, 要从算法上提高反演的质量有一定的困难。但对于单向纤维增强复合材料这种具有横向各向同性性质的典型各向异性材料, 其声速的解析解是可以求得的^[4], 因而可以方便地应用于其弹性常数的反演。

本文在给出单向纤维增强复合材料相速度解析表达式的基础上, 解析地求出了雅可比矩阵, 用迭代阻尼最小二乘法对超声波速度测量数据进行反演, 得到了这种材料板的弹性常数。数值计算中采用了奇异值分解技术以改善计算的精度和稳定性。用模型计算的声速数据和实测的声速数据均进行了弹性常数的反演, 结果表明了反演算法是有效的。

2 理论

2.1 相速度的解析表达

设厚度为 h , 体密度为 ρ 的单向纤维增强复合材料板位于波速为 c_f 的流体中, 在板顶上方置一发射换能器 T、板底下方置一接收换能器 R, 如图 1 所示。建立右旋直角坐标系, x_1 轴平行于纤维方向, x_2 轴垂直于纤

维方向, x_3 轴垂直于板的顶、底面, 假定板在 x_1, x_2 方向是无限延伸的, 纤维方向的单位矢量为 $\vec{\alpha}^0 = (1, 0, 0)$, 板体的弹性性质可以用五个独立的弹性常数 $c_{11}, c_{22}, c_{12}, c_{44}$ 和 c_{66} 来描述; 即, 板体可视为横向各向同性均匀体或六角对称晶体。

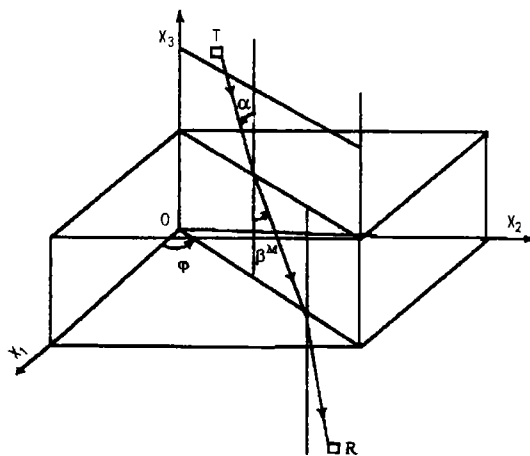


图 1 坐标系示意图

从换能器 T 发出的入射纵波经流体介质到达固体板顶界面时, 将在板体内激发起三种模式的体波: 准纵波 (qP)、准垂向切变波 (qSV)、和纯水平切变波 (SH)。这些体波穿过固体板到达底界面后, 透射到流体中的部分成为纵波而被换能器 R 接收到。设入射平面与 x_1 轴的夹角为 ϕ , 入射角为 α , 折射角为 β^M , ($M=qP, qSV, SH$), 则波矢量方向的单位矢量为:

$$\vec{k}^0 = (\sin \beta^M \cos \phi, \sin \beta^M \sin \phi, -\cos \beta^M)$$

入射波和折射波满足 Snell 定律:

$$\frac{\sin \alpha}{c_f} = \frac{\sin \beta^M}{v^M} \quad (1)$$

其中, v^M 为板体内各模式波的相速度^[4]:

$$v^{qP, qSV} = \sqrt{\frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4a}}{2\rho}} \quad (2)$$

$$v^{SH} = \sqrt{\frac{c_{44} + (c_{66} - c_{44}) \sin^2 \beta \cos^2 \phi}{\rho}} \quad (3)$$

$$b = c_{22} + c_{66} + (c_{11} - c_{22}) \sin^2 \beta \cos^2 \phi \quad (4)$$

$$a = c_{22}c_{66} + [c_{22}(c_{11} - 2c_{66}) - c_{12}(c_{12} + 2c_{66})] \sin^2 \beta \cos^2 \phi + [c_{11}c_{66} + c_{12}(c_{12} + 2c_{66}) - c_{22}(c_{11} - 2c_{66})] \sin^4 \beta \cos^4 \phi \quad (5)$$

上面各式中, 略去了不同模式波折射角的上标。

实际观测中, 折射角 (可由发射换能器和接收换能器之间有、无板体两种情况下, 声波到达接收换能器的时间差 δt 及入射角 α 来确定^[10]),

$$\sin \beta = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - 2q \cos \alpha + q^2}} \quad (6)$$

相速度 v 由

$$v = \frac{c_f}{\sqrt{1 - 2q \cos \alpha + q^2}} \quad (7)$$

确定。其中, $q = c_f \delta t / h$ 。

由相速度的解析式可以看出, qP 波和 qSV 波都对 c_{44} 不敏感, 利用它们只可以反演出其余四个弹性常数, 然后将反演出的 c_{66} 作为已知量, 代入 (3) 式, 在 ϕ 不等于零的条件下反求出 c_{44} 。

2.2 最优化问题^[11]

为标识方便计, 将由 (7) 式得到的对应着不同折射角 $\beta_i (i = 1, 2, \dots, L)$ 的一组声速观测数据表示为:

$$\vec{c} = (c_1, c_2, \dots, c_L)^T \quad (8)$$

其中, L 为声速观测数据的总数。

相应地, 由 (2) 式计算出的 L 个声速值为:

$$\vec{v} = [v_1(\vec{p}), v_2(\vec{p}), \dots, v_L(\vec{p})]^T \quad (9)$$

其中, $\vec{p}$ 为 N 个待反演的弹性常数构成的列向量:

$$\vec{p} = (p_1, p_2, \dots, p_N)^T \quad (10)$$

由 (2) 式知, $N=4$, 并取. $p_1 = c_{11}, p_2 = c_{12}, p_3 = c_{22}, p_4 = c_{66}$ 。

应用声学

现在, 需要不断地改变待求弹性常数所构成的列向量 $\vec{p}$, 使 (9) 式中的计算值尽可能地与 (8) 式中的实测值相吻合, 当两者吻合最好时, 则认为所对应的弹性常数即是材料真实弹性常数的最佳估计。

设 $\vec{p}^0$ 是 $\vec{p}$ 的初始估计, 则在 $\vec{p}^0$ 点将 $\vec{v}(\vec{p})$ 展开为泰勒级数, 在满足条件 $|\vec{p} - \vec{p}^0| < \epsilon$ 时, 略去级数中二次以上的项, 得到:

$$\vec{v} \approx \vec{v}(\vec{p}^0) + A\vec{\delta} \quad (11)$$

其中, A 为 $L \times N$ 个元素的雅可比矩阵, 可由声波相速度的解析式求偏导数得到, $\vec{\delta} = \vec{p} - \vec{p}^0$ 是待反演的弹性常数与初始估计的弹性常数之间的差值所构成的列向量。需要说明, 约束条件 $|\vec{p} - \vec{p}^0| < \epsilon$ 要求初始估计不能偏离真值太远, 即要求对待反演的弹性常数有一定的先验信息。

设实测声速值列向量与计算出的声速值列向量之差构成的列向量为:

$$\vec{e} = \vec{c} - \vec{v}(\vec{p}) \approx \vec{c} - \vec{v}(\vec{p}^0)A\vec{\delta} \quad (12)$$

并取目标函数为:

$$\phi(\vec{p}, \lambda) = \vec{e}^T \vec{e} + \lambda \vec{\delta}^T \vec{\delta} \quad (13)$$

λ 为拉格朗日乘数因子, 也就是阻尼因子。

为求一向量 $\vec{p}^*$ 使目标函数 (13) 达极小, 要求:

$$\frac{\partial \phi(\vec{p}, \lambda)}{\partial \vec{\delta}} = 0 \quad (14)$$

从而得到线性代数方程组:

$$(A^T A + \lambda I) \vec{\delta} = A^T [\vec{c} - \vec{v}(\vec{p}^0)] \quad (15)$$

其中, I 为 $N \times N$ 单位矩阵。求解 (15), 可以得到 $\vec{\delta}$, 进而得到 $\vec{p}^*$

方程 (15) 中, 由于雅可比矩阵 A 的元素是声速理论公式的偏导数, 因而数量级很小, 从而使线性代数方程组的系数矩阵呈现出奇异性, 特别是当折射角小的时候, 使解发散。阻

尼因子使线性方程组的迭代求解过程收敛速度加快。但并未改善其稳定性。所以，我们用奇异值分解法^[12]求解线性方程组：

$$\vec{\delta} = V \text{diag} \left(\frac{s_j}{s_j^2 + \lambda} \right) U^T [\vec{c} - \vec{v}(p^0)] \quad (16)$$

其中， s_j 为矩阵 A 奇异值的前 N 个值 ($j=1,2,\cdots,N$)。

从 (16) 式可以看出：即使在矩阵 A 性态不理想的条件下，当 $s_j \rightarrow 0$ 时，也不会出现被零除的后果。

3 数值实现

运用上述理论，我们编制了 Fortran 程序并在计算机上加以实现。程序流程如图 2 所示。

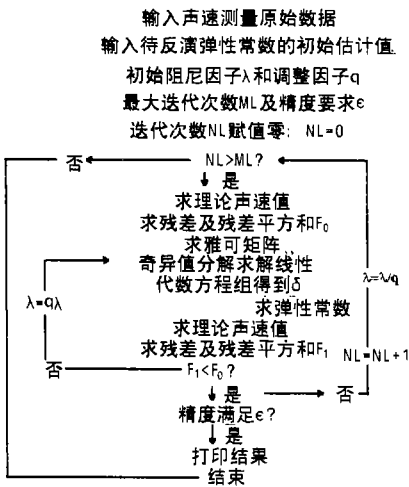


图 2 数值计算流程图

3.1 模拟数据反演结果

为了检验本文所述反演方法的可行性及有效性，我们首先用 J. E. Zimmer 等人给出的玻璃纤维 / 环氧单向纤维增强复合材料的弹性常数作为模型，模型参数为^[10]： $c_{11} = 60.1, c_{12} = 7.0, c_{22} = 25.8, c_{44} = 5.8, c_{66} = 4.9, \rho = 1.9$ ，弹性常数的单位为 GPa，密度的单位为 g/cm^3 。把用这一模型计算的声速值作为模拟观测数据，用最小二乘反演算法求取该模型的弹性常数，看看求出的弹性常数值是否是模型的真实（已知）弹性常数值。

反演时，弹性常数的初始值为： $c_{11} = 80.1, c_{12} = 9.0, c_{22} = 17.8, c_{66} = 3.5, \rho = 1.9$ ，初始阻尼因子取为 $\lambda = 0.1$ ，调整因子取为 $v=10$ ，用 qP 波速度反演，对 $\phi=0、30、45$ 的情况均作了试验，经过 5 至 9 次迭代都能完全收敛于真值。图 3 给出了 $\phi=45$ 时，初始模型速度曲线（虚线）和真正模型速度曲线（实线）的对比图，经过 5 次迭代，初始模型完全收敛于真正模型。其中，初始阻尼因子 $\lambda=0.1$ ，调整因子 $v=2$ ，最终阻尼因子为 $\lambda=0.3125 \times 10^{-2}$ ，精度 $\epsilon=0.945 \times 10^{-8}$ 。

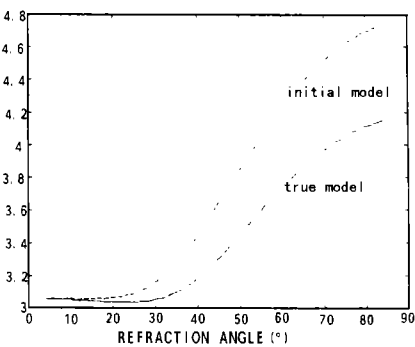


图 3 模拟数据反演结果

3.2 实验数据反演结果

为了进一步检验反演方法的有效性，我们也对实际测量的声速资料进行了反演。结果示于图 4 和图 5。图中的虚线表示初始模型速度曲线，* 号表示实验速度值，实线表示最终收敛的反演参数所对应的速度曲线。其中，图 4 为 qP 波的反演结果，图 5 为 qSV 波的反演结果，它们都是在 $\phi=0$ 条件下作的测量。两者都经过 9 次迭代收敛。

用 qP 波速度测量数据反演时的初始模型为： $c_{11} = 110.0 \text{GPa}, c_{12} = 3.0 \text{GPa}, c_{22} = 20.0 \text{GPa}, c_{66} = 8.0 \text{GPa}, \rho = 1.75 \text{g/cm}^3$ 。

最终反演结果为： $c_{11} = 103.2 \text{GPa}, c_{12} = 1.57 \text{GPa}, c_{22} = 17.7 \text{GPa}, c_{66} = 9.39 \text{GPa}, \rho = 1.75 \text{g/cm}^3, \epsilon = 0.869 \times 10^{-2}$ 。

用 qSV 波速度测量数据反演时的初始模型为： $c_{11} = 100.0 \text{GPa}, c_{12} = 3.0 \text{GPa}, c_{22} = 18.0 \text{GPa}, c_{66} = 9.0 \text{GPa}, \rho = 1.75 \text{g/cm}^3$ 。

最终反演结果为: $c_{11} = 112.0 \text{ GPa}$, $c_{12} = 2.7 \text{ GPa}$, $c_{22} = 17.7 \text{ GPa}$, $c_{66} = 8.1 \text{ GPa}$, $\rho = 1.75 \text{ g/cm}^3$, $\epsilon = 0.812 \times 10^{-3}$ 。

从两种不同波的声速数据反演出的弹性常数有一些差别,从理论上说,出现这一差别是不应该的。但从实际测量过程来看,这种差别是难免的。对于垂直入射,主要来源于两种声速的测量误差;对于斜入射,这种误差还有可能来源于:实际入射声束并非是一条几何上的直线,声束是有一定截面积的,这就造成了确定入射角时的误差,这种误差随着入射角的增大而增大。另外, qP 波的声速大于 qSV 波的声速,其入射角的观测范围小(临界角小),因而观测误差小;而 qSV 波的入射角观测范围大(临界角大),所以观测误差也大。入射角确定中的误差必然造成参数反演结果的误差,从理论上分析这一问题,我们认为:用 qP 波声速测量数据反演单向纤维增强复合材料的弹性常数比用 qSV 波声速测量数据反演的精度要高一些。

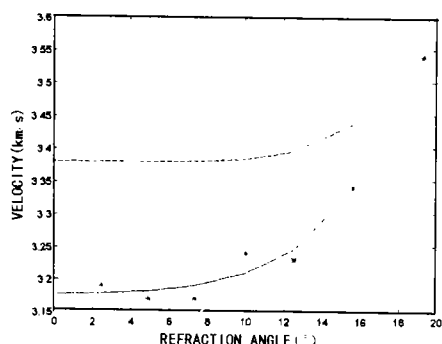


图 4 实验数据反演结果 (qP 波)

由于难以合理的确定两种波速资料反演出的弹性常数权的大小,也考虑到本文的主题,我们没有采用加权求平均的办法,而是简单地将两种反演结果取平均作为该材料的四个弹性常数。然后用 $\phi = 45^\circ$ 时的 SH 波速度测量数据求出 c_{44} 。最终求得的弹性常数值为: $c_{11} = 107.6 \text{ GPa}$, $c_{12} = 2.14 \text{ GPa}$, $c_{22} = 17.7 \text{ GPa}$, $c_{44} = 4.17 \text{ GPa}$, $c_{66} = 8.75 \text{ GPa}$ 。

4 结束语

本文用阻尼最小二乘法结合奇异值分解技术对声速测量数据进行了反演处理,得到了单向纤维增强复合材料的五个弹性常数,为进一步应用超声检测方法评价这种材料的力学性能提供了一点可能。如何寻找这种材料的弹性常数与其力学性能之间的关系则需要另做工作。这也是我们正在进行的工作。另外,在反演方法稳定性的研究方面仍需继续努力。

致谢 感谢中国科学院声学研究所许明翔先生为本文提供了实验资料。

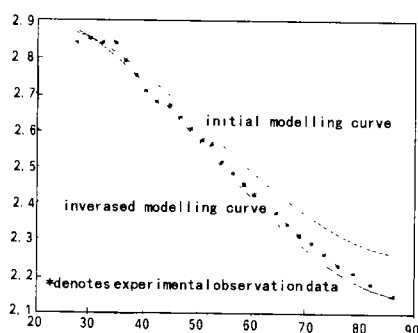


图 5 实验数据反演结果 (qSV 波)

参 考 文 献

- 1 Roklin S I, Bolland T K, Adler E L. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1986, **79**(4): 906-918.
- 2 Nayfeh A H. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1991 **89**: 1521-1531.
- 3 Ogilvy J A. *Ultrasonics*, 1995, **33**(2): 85-93.
- 4 王小民, 李明轩. 中国声学学会 1997 年青年学术会议论文集. 哈尔滨工程大学出版社, 1997, 155-159.
- 5 Kim K Y, Scribar R, Saches W. *J. Appl. Phys.*, 1995, **77**(11): 5589-5600.
- 6 Christensen R M. *Mechanics of Composite Materials* (Wiley, New York, 1979).
- 7 刘小萍. 中国声学学会 1995 年青年学术会议论文集. 西北工业大学出版社, 1995, 296-300.
- 8 Rokhlin S I, Wang W. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1993, **94** (5): 2712-2730.
- 9 许明翔, 王耀俊. 应用声学, 1996, **15**(1): 1-4.
- 10 Zimmer J E, Cost J R. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1970, **47** (3): 795-803.
- 11 Lines L R, Treitel S. *Geophysical Prospecting*, 1984, **32**: 159-186.
- 12 徐士良. Fortran 常用算法程序集. 清华大学出版社, 1992, 29.