第 38 卷 第 4 期
2019 年 7 月

应用声学
Journal of Applied Acoustics

Vol. 38, No. 4
July, 2019

◇ 李启虎院士八十华诞学术论文 ◇

质点振速传感器直线阵超指向性波束形成*

朱少豪　汪　勇　杨益新†

(西北工业大学航海学院　西安　710072)

摘要　声矢量传感器及其组阵方式的研究已成为水声领域的热门课题。该文研究了当单自由度矢量传感器(质点振速传感器)的观测方向沿直线阵轴线方向时的空间均匀噪声场中两阵元的噪声相关系数，然后采用 Gram-Schmidt 模态波束分解与综合方法推导了高阶超指向性的最优解，得到了直线阵端射方向的指向性指数和稳健性水平。仿真研究表明，当 $d/\lambda < 0.5$ (d 为阵元间距，λ 为波长) 时，质点振速传感器直线阵 (简称质点振速阵) 采用超指向性方法在端射方向的指向性指数略高于声压传感器直线阵 (简称声压阵)；而当 $d/\lambda > 0.5$ 时，质点振速阵的指向性指数远远高于声压阵。该文的研究内容对水下声呐系统中质点振速传感器的有效组阵和实际应用具有一定的参考价值。

关键词　质点振速传感器，声矢量传感器，直线阵，超指向性波束形成

中图法分类号: TJ630; TB566　　**文献标识码:** A　　**文章编号:** 1000-310X(2019)04-0596-09

DOI: 10.11684/j.issn.1000-310X.2019.04.017

Superdirective beamforming of line arrays using particle velocity sensors

ZHU Shaohao　WANG Yong　YANG Yixin

(*School of Marine Science and Technology, Northwestern Polytechnical University, Xi'an* 710072, *China*)

Abstract　Research on acoustic vector sensors and their arrays has become a hot topic in the field of underwater acoustic engineering. In this paper, the noise correlation coefficients between the array elements in a spatially isotropic noise field are studied when the desired observation direction of the one-degree-of-freedom vector sensor (particle velocity sensor) is along the direction of the line array axis, and the optimal solutions of high-order super-directivity based on the Gram-Schmidt mode-beam decomposition and synthesis are introduced. Then the directivity index and robustness in the end-fire direction are derived. Simulation results show that the directivity index of the particle velocity sensor array is slightly higher than that of the acoustic pressure sensor array in the end-fire direction when $d/\lambda < 0.5$ (d is the spacing of two adjacent elements, λ is the wavelength); when $d/\lambda > 0.5$, the directivity index of the particle velocity array is much higher than that of the acoustic pressure sensor array. The research content of this paper provides a reference on how to effectively form a particle velocity sensor array in underwater sonar systems.

Key words　Particle velocity sensor, Acoustic vector sensor, Line array, Superdirective beamforming

---

2019-01-31 收稿; 2019-04-05 定稿

*国家重点研发计划项目 (2016YFC1400200), 国家自然科学基金项目 (11604259), 中国科协第四届青年人才托举工程项目 (2018QNRC001)

作者简介: 朱少豪 (1989-), 男, 河北巨鹿人, 博士研究生, 研究方向: 阵列信号处理。

†通讯作者 E-mail: yxyang@mail.nwpu.edu.cn

0 引言

几十年来，声压传感器阵列以其稳定可靠、易于分析和处理的优点占据了水下声呐阵列的主导地位。近年来，声矢量传感器及其组阵处理技术已成为水声领域备受瞩目的研究内容，相比于声压传感器，它能够同步、共点、直接测量声场空间一点处的声压和质点振速的若干正交分量，从而为水声系统带来更高的波束形成处理性能[1−4]。

从目前的应用需求而言，有两种类型的声矢量传感器(水听器)组成的直线阵最值得研究。一种是矢量传感器的观测方向与基阵的轴线垂直，可用于拖曳线列阵；另一种是观测方向与基阵的轴线重合，可组成端射阵。前者对应于传感器的横向相干性，后者则是纵向相干性。两种组阵方式的波束形成性能可能会有显著的差异，有必要加以研究。

在三维各向同性空间均匀噪声场和二维各向同性空间均匀噪声场中，两个无指向性传感器之间的噪声相关系数已经有明确的公式和结论[5]，而接收传感器有方向性的情况研究得并不多。但针对上述两种应用需求的情况，单自由度的矢量传感器(质点振速传感器)之间的横向和纵向相关性已有明确的结论[6−7]。但是质点振速传感器阵列的稳健超指向性波束形成效果如何还有待进一步研究。传统的最小方差无失真响应[8](Minimum variance distortionless response, MVDR)波束形成稳健性较差，其噪声协方差矩阵若是奇异矩阵，则将对矩阵求逆的计算带来不良后果。Gram-Schmidt(GS)模态波束分解与综合超指向性方法[9]适用于任意阵形且稳健性较好，但是一直停留在对声压阵的处理，对于矢量阵的性能研究有待进一步分析。

直线阵在端射方向的超指向性最为明显，本文研究了当质点振速传感器的观测方向与基阵的轴线重合时的超指向性波束形成方法。首先通过球贝塞尔函数研究了空间均匀噪声场中两个质点振速传感器之间的噪声相关系数，这也代表了阵列噪声协方差矩阵中的元素；然后引入了GS模态波束分解与综合超指向性方法，总波束响应可表示为不同稳健性的各阶波束响应分量的和，得到了直线阵端射方向的指向性指数(Directivity index, DI)和稳健性水平的表达式，并与声压阵进行了对比。

1 直线阵信号模型

1.1 阵列流形向量

假设一个具有M个阵元的直线阵位于z轴上，如图1所示，相邻阵元间距为d，如果第1个阵元位于原点，那么第m个阵元的位置坐标为

$$\boldsymbol{L}_m = [0, 0, (m-1)d]^{\mathrm{T}}, \tag{1}$$

其中，“T”表示转置。现有一远场平面波信号从角度(θ, ϕ)入射到该直线阵，其中θ为垂直俯仰角，ϕ为水平方位角，那么该信号传播方向的单位向量在球坐标系中可定义为

$$\boldsymbol{u} = -[\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta]^{\mathrm{T}}. \tag{2}$$

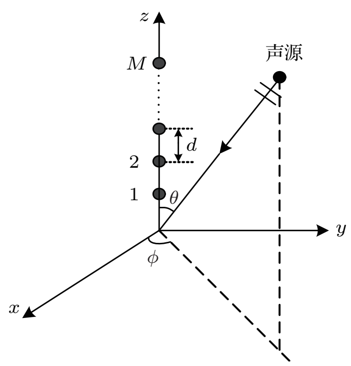


图1 直线阵坐标示意图

Fig. 1 Coordinates of a line array

对于由无指向性阵元组成的声压阵，第m个阵元的接收响应可表示为[10]

$$\begin{aligned} p_m &= \exp\left(-\mathrm{j}k\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}_m\right) \\ &= \exp\left[\mathrm{j}k(m-1)d\cos\theta\right], \end{aligned} \tag{3}$$

其中，波数$k = 2\pi/\lambda$，λ为波长。而对于由单自由度质点振速传感器组成的直线阵，其第m个阵元的接收响应可表示为

$$p_m = \cos\theta \cdot \exp\left[\mathrm{j}k(m-1)d\cos\theta\right]. \tag{4}$$

可见，质点振速传感器具有$\cos\theta$指向性的特点，其随角度θ变化的空间接收响应成“8”字形，如图2所示。由于直线阵位于z轴上，因此接收响应与水平方位角ϕ无关。一般而言，直线阵的阵列流形向量可表示为

$$\boldsymbol{P}(\theta) = [p_1, p_2, ..., p_m, ..., p_M]^{\mathrm{T}}. \tag{5}$$

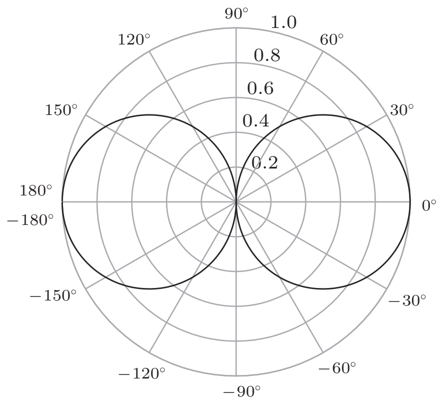


图2 质点振速传感器接收信号的空间响应

Fig. 2 Spatial response of a particle velocity sensor

1.2 波束形成

令 $\boldsymbol{w}$ 为波束形成的加权向量，波束响应一般可定义为

$$B(\theta,\phi)=\boldsymbol{w}^{\mathrm{H}}(\theta_0,\phi_0)\,\boldsymbol{P}(\theta,\phi), \tag{6}$$

其中，上标“H”表示复共轭转置，(θ_0,ϕ_0) 为波束的期望方向。对于常规波束形成 (Conventional beamforming, CBF)，其归一化的加权向量定义为

$$\boldsymbol{w}_{\mathrm{CBF}}(\theta_0,\phi_0)=\frac{\boldsymbol{P}(\theta_0,\phi_0)}{\boldsymbol{P}^{\mathrm{H}}(\theta_0,\phi_0)\,\boldsymbol{P}(\theta_0,\phi_0)}. \tag{7}$$

对于传统MVDR波束形成，其最小化噪声输出的无失真响应约束为[8]

$$\begin{cases}\quad\min\quad \boldsymbol{w}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{\rho}\boldsymbol{w},\\ \text{subject to}\ \ \boldsymbol{w}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{P}(\theta,\phi)=1,\end{cases} \tag{8}$$

其中，$\boldsymbol{\rho}$ 为噪声协方差矩阵，易得MVDR波束形成的最优加权为

$$\boldsymbol{w}_{\mathrm{MVDR}}=\frac{\boldsymbol{\rho}^{-1}\boldsymbol{P}(\theta,\phi)}{\boldsymbol{P}^{\mathrm{H}}(\theta,\phi)\boldsymbol{\rho}^{-1}\boldsymbol{P}(\theta,\phi)}. \tag{9}$$

空间均匀噪声场中的阵列指向性因子 (Directivity factor, DF) 可表示为

$$\begin{aligned}\mathrm{DF}&=\frac{|B(\theta_0,\phi_0)|^2}{\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}|B(\theta,\phi)|^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi}\\&=\frac{|\boldsymbol{w}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{P}(\theta_0,\phi_0)|^2}{\boldsymbol{w}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{\rho}\boldsymbol{w}}.\end{aligned} \tag{10}$$

1.3 噪声协方差矩阵

在三维各向同性空间均匀噪声场中，两个无指向性阵元之间的噪声相关系数是一个关于阵元间距的sinc函数[5]，即

$$\varPsi(x)=\frac{\sin x}{x}, \tag{11}$$

其中，$x=k\Delta d$，Δd 为两个阵元之间的距离。假设空间均匀噪声场中 M 元线列阵的噪声协方差矩阵为 $\boldsymbol{\rho}_o$，其第 (m,m')(即第 m 行、m' 列) 个元素为

$$\rho_{m,m'}=\frac{\sin x}{x}=\frac{\sin(k|m-m'|d)}{k|m-m'|d}. \tag{12}$$

在球坐标系中求解所得的球贝塞尔函数，与sinc函数有密切关系，第 n 阶球贝塞尔函数可表示为[11]

$$\mathrm{j}_n(x)=(-x)^n\left(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^n\frac{\sin x}{x}. \tag{13}$$

当 $n=0,1,2$ 时，可得

$$\mathrm{j}_0(x)=\frac{\sin x}{x}, \tag{14}$$

$$\mathrm{j}_1(x)=\frac{\sin x}{x^2}-\frac{\cos x}{x}, \tag{15}$$

$$\mathrm{j}_2(x)=\left(\frac{3}{x^2}-1\right)\frac{\sin x}{x}-\frac{3\cos x}{x^2}. \tag{16}$$

可见，两个无指向性阵元的噪声空间相关系数是第0阶的球贝塞尔函数。对于沿 z 轴方向 (纵向) 的线列阵而言，各向同性噪声场中两个沿 z 轴方向的质点振速传感器之间的噪声相关系数为[6]

$$\varPsi_{zz}(x)=\left[\frac{\mathrm{j}_1(x)}{x}-\mathrm{j}_2(x)\right]\cos(x\sin\phi). \tag{17}$$

取水平方位角 $\phi=0°$，并将式 (15) 和式 (16) 代入式 (17)，可得

$$\varPsi_{zz}(x)=\left(1-\frac{2}{x^2}\right)\frac{\sin x}{x}+\frac{2\cos x}{x^2}. \tag{18}$$

当 $x\to 0$ 时，$\varPsi_{zz}\to 1/3$，因此归一化的噪声相关系数为

$$\varPsi_{zz}(x)=3\left[\left(1-\frac{2}{x^2}\right)\frac{\sin x}{x}+\frac{2\cos x}{x^2}\right]. \tag{19}$$

图3给出了 j_0、j_1、j_2 和归一化的空间相关函数 $\varPsi_{zz}$ 随 d/λ 值变化的曲线，其中 $d/\lambda=x/2\pi$。声压传感器对应的曲线 (即 j_0) 在 $d/\lambda=0.5$ 处为第一个零点，即当采用常规波束形成时，声压传感器直线阵的阵元间距应为波长的二分之一才能达到理想的波束形成效果。而对于质点振速传感器对应的相关曲线 (即 $3\cdot(\mathrm{j}_1/x-\mathrm{j}_2)$) 的第一个零点出现在 $d/\lambda=1/3$ 处，但是曲线呈现大幅度振荡到 $d/\lambda=2$ 处，这说明如果使用质点振速传感器，按照常规方式组成端射线列阵，阵元间距需要增大到 2λ 左右，即阵长

需要增加到声压阵长度的四倍。因此，由有指向性阵元组成的超指向性阵列，能否得到预期的效果，结果尚不明确，有待进一步深入研究。

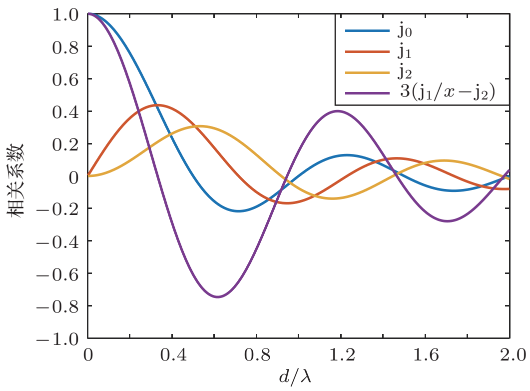


图 3　随 d/λ 值变化的空间相关函数

Fig. 3　Spatial-coherence versus d/λ

通过式 (18) 可求取空间均匀噪声场中质点振速传感器直线阵 (简称质点振速阵) 的未归一化的噪声协方差矩阵 $\boldsymbol{\rho}_v$ 的元素， 令式 (18) 中 $x = k|m-m'|d$，其第 (m, m') 个元素为

$$\begin{aligned}\rho_{m,m'} &= \varPsi_{zz}\left(k|m-m'|d\right)\\ &= \left(1-\frac{2}{(k|m-m'|d)^2}\right)\frac{\sin(k|m-m'|d)}{k|m-m'|d}\\ &\quad+\frac{2\cos(k|m-m'|d)}{(k|m-m'|d)^2}.\end{aligned} \tag{20}$$

利用式 (20) 计算得到噪声协方差矩阵，并将式 (9) 最优加权代入式 (10)，当 $x\to 0$ 时可得到质点振速阵在端射方向的最大的指向性因子为 [12]

$$\mathrm{DF}_{\max} = M^2 + 2M. \tag{21}$$

该式与声压传感器阵列的 M^2 定律有所不同，其值大于声压传感器阵列指向性因子的最大值。

1.4　乘积定理

对于由相同指向性传感器组成的直线阵，其方向图乘积定理可以认为是指向性传感器阵列的波束图是具有相同几何形状的全向传感器的阵列响应与单个传感器方向响应的乘积 [13]。对于振速传感器阵列，单个传感器的方向响应为 $\cos\theta$，第 m 号阵元的空间接收响应将变为

$$\begin{aligned}\hat{p}_m &= \cos\theta\cdot p_m\\ &= \cos\theta\cdot\exp\left[\mathrm{j}k(m-1)d\cos\theta\right].\end{aligned} \tag{22}$$

那么基于乘积定理的阵列流形向量可定义为

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{P}}(\theta,\phi) &= \cos\theta\cdot\left[p_1,p_2,\cdots,p_m,\cdots,p_M\right]^{\mathrm{T}}\\ &= \cos\theta\cdot\boldsymbol{P}(\theta,\phi).\end{aligned} \tag{23}$$

这与质点振速传感器的阵列流形向量相同，波束响应可重写为

$$\hat{B}(\theta,\phi) = B(\theta,\phi)\cos\theta. \tag{24}$$

进一步的，基于乘积定理的指向性因子推导如下

$$\begin{aligned}\widehat{\mathrm{DF}} &= \frac{|\hat{B}(\theta_0,\phi_0)|^2}{\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}|\hat{B}(\theta,\phi)|^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi}\\ &= \frac{|B(\theta_0,\phi_0)\cos\theta_0|^2}{\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\boldsymbol{w}^{\mathrm{H}}\hat{\boldsymbol{P}}(\theta,\phi)\hat{\boldsymbol{P}}(\theta,\phi)^{\mathrm{H}}\boldsymbol{w}\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi}\\ &= \frac{|\boldsymbol{w}^{\mathrm{H}}\hat{\boldsymbol{P}}(\theta_0,\phi_0)|^2}{\boldsymbol{w}^{\mathrm{H}}\left[\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\hat{\boldsymbol{P}}(\theta,\phi)\hat{\boldsymbol{P}}(\theta,\phi)^{\mathrm{H}}\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi\right]\boldsymbol{w}}\\ &= \frac{|\boldsymbol{w}^{\mathrm{H}}\hat{\boldsymbol{P}}(\theta_0,\phi_0)|^2}{\boldsymbol{w}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{\rho}_v\boldsymbol{w}},\end{aligned} \tag{25}$$

其中，

$$\boldsymbol{\rho}_v = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\hat{\boldsymbol{P}}(\theta,\phi)\hat{\boldsymbol{P}}(\theta,\phi)^{\mathrm{H}}\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi,$$

这与质点振速阵的噪声协方差矩阵相同，其矩阵元素可由式 (20) 计算。因此可以认为，基于乘积定理计算得到的指向性因子相当于质点振速传感器阵列的一个次优的结果。

2　GS 超指向性波束形成

基于 GS 模态分解与综合的超指向性方法中的噪声协方差矩阵的逆矩阵可表示为 [9]

$$\boldsymbol{\rho}^{-1} = \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}^{-2}\boldsymbol{C}, \tag{26}$$

其中，$\boldsymbol{D}$ 为一个 $M\times M$ 对角矩阵，$\boldsymbol{D}^{-2}$ 用来对输入噪声进行归一化，$\boldsymbol{C}$ 是一个正交变换矩阵，具有如下形式：

$$\boldsymbol{C} = \left[\boldsymbol{c}_0\ \ \boldsymbol{c}_1\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{c}_k\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{c}_{M-1}\right]^{\mathrm{T}}, \tag{27}$$

其中，$\boldsymbol{c}_k = [c_{k0}\ c_{k1}\ \cdots\ c_{kk}\ 0\ \cdots 0\ ]^{\mathrm{T}}$，$c_{ki}$ 可由式 (28) 计算，

$$c_{ki}=\begin{cases}1, & i=k,\\ -\sum\limits_{j=i}^{k-1}\dfrac{c_{ji}}{\chi_j}\left(\sum\limits_{h=0}^{j}c_{jh}\rho_{kh}\right), & 1\leqslant k\leqslant M-1\\ & \text{且}, i,j\leqslant k-1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases} \tag{28}$$

式 (28) 中，$\chi_j = \sum\limits_{h=0}^{i}\sum\limits_{m=0}^{j} c_{jh}c_{jm}\rho_{hm}$。因此式 (9) 中的最优加权向量可改写为

$$\boldsymbol{w}_{\mathrm{opt}} = \alpha \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}^{-2}\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{P}(\theta_0,\phi_0), \tag{29}$$

其中，α 是保证期望信号输出无失真的归一化因子，为简便起见，令 $\alpha=1$，不影响一般性的结论。超指向性波束响应可进一步写为

$$\begin{aligned}B(\theta,\phi) &= \boldsymbol{w}_{\mathrm{opt}}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{P}(\theta,\phi)\\ &= \alpha\left[\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{P}(\theta_0,\phi_0)\right]^{\mathrm{H}}\boldsymbol{D}^{-2}\left[\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{P}(\theta,\phi)\right]\\ &= \sum_{k=0}^{M-1}B_k(\theta,\phi),\end{aligned} \tag{30}$$

其中，B_k 为第 $k(k=0,1,\cdots,M-1)$ 阶 GS 模态波束，即

$$B_k(\theta,\phi) = \frac{\alpha}{\eta_k}\cdot E_k^*(\theta_0,\phi_0)\,E_k(\theta,\phi), \tag{31}$$

式 (31) 中：$E_k(\theta,\phi) = \boldsymbol{c}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}(\theta,\phi)$，$\eta_k = \boldsymbol{c}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\rho}\boldsymbol{c}_k$，$\eta_k$ 表示正交变换之后的第 k 号阵元所在通道的噪声功率。指向性因子 (空间均匀噪声场中等于阵增益) 可表示为

$$\begin{aligned}\mathrm{DF} &= \left[\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{P}(\theta_0,\phi_0)\right]^{\mathrm{H}}\boldsymbol{D}^{-2}\left[\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{P}(\theta_0,\phi_0)\right]\\ &= \sum_{k=0}^{M-1}\left|E_k(\theta_0,\phi_0)\right|^2/\eta_k = \sum_{k=0}^{M-1}D_k,\end{aligned} \tag{32}$$

其中，

$$D_k = \left|E_k(\theta_0,\phi_0)\right|^2/\eta_k \tag{33}$$

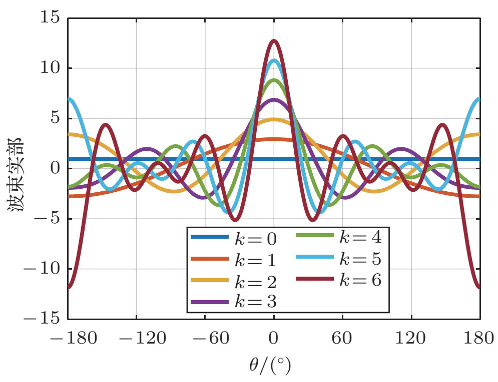
是第 k 阶 GS 模态波束的指向性因子。由于式 (31)～式 (33) 中的分母均有 η_k，其值的大小对波束形成稳健性有直接的影响，η_k 值越大代表第 k 阶波束越稳健。指向性指数 (DI) 是指向性因子 (DF) 的分贝表示，有

$$\mathrm{DI} = 10\lg(\mathrm{DF}). \tag{34}$$

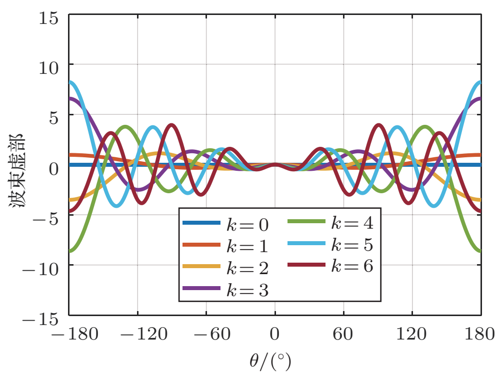
3 仿真分析

设有两个直线阵，分别由声压传感器和质点振速传感器组成，阵元数均为 7，相邻两个阵元之间的距离都为 d，沿坐标系 z 轴方向成阵，如图 1 所示。水下声速设为 1500 m/s。

图 4 和图 5 分别给出了在期望方向 $\theta=0°$(即端射方向) 且 $x=0.5$(即 $d/\lambda=0.08$) 时声压阵和质点振速阵 GS 超指向性方法第 0 ～ 6 阶波束的实部和虚部。对比图 4(a) 和图 5(a) 可以看出，声压阵 GS 第 0 阶波束的实部是一条直线，而质点振速阵的第 0 阶波束的实部已经具有一定的指向性；其次，质点振速阵各阶波束的实部在期望方向上的值略高于声压阵。对比图 4(b) 和图 5(b)，与 GS 波束实部不同的是两种阵列的波束虚部在期望方向附近的值是比较接近的。图 6 给出了图 4 和图 5 中 GS 第 0 ～ 6 阶波束合成后的波束及其归一化后的结果，可以看出，质点振速阵的指向性略高于声压阵。



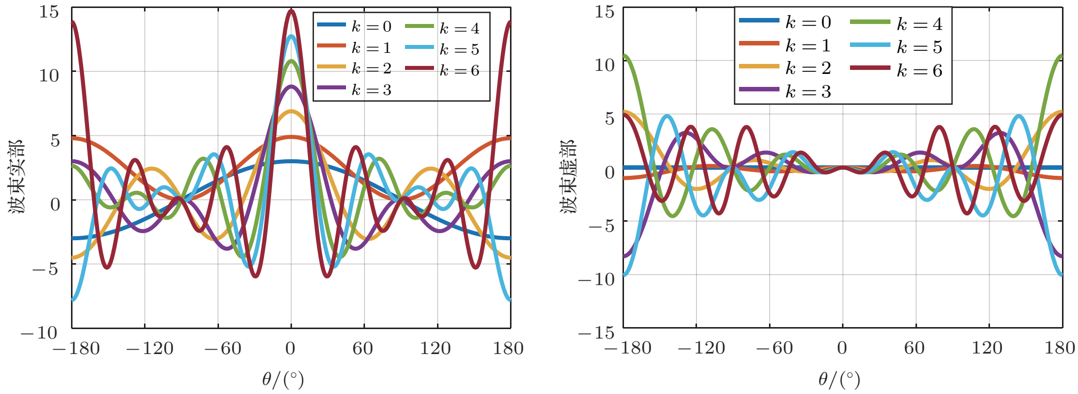
(a) 波束实部



(b) 波束虚部

图 4 声压直线阵 GS 波束实部和虚部 ($x=0.5$，即 $d/\lambda=0.08$)

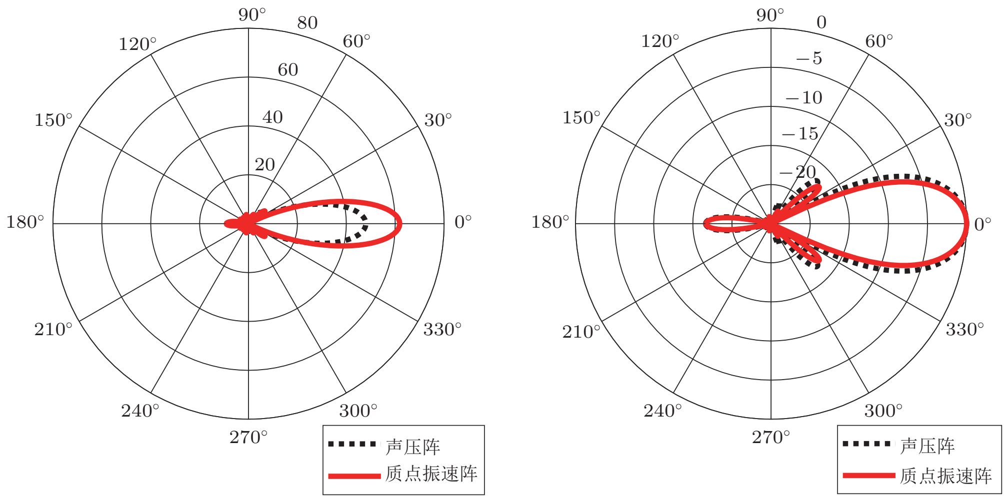
Fig. 4 The real and imaginary parts of GS beams for the acoustic pressure line array ($x=0.5$, that is $d/\lambda=0.08$)



(a) 实部　　　　(b) 虚部

图 5　质点振速直线阵 GS 波束实部和虚部 ($x = 0.5$，即 $d/\lambda = 0.08$)

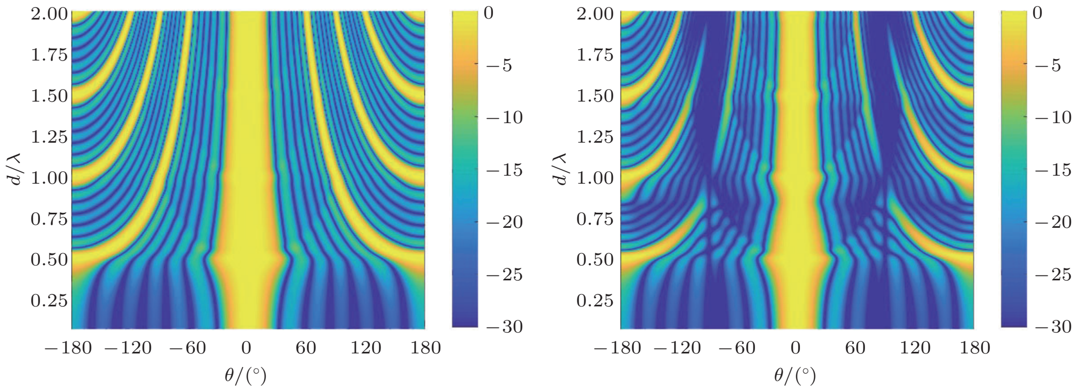
Fig. 5　The real and imaginary parts of GS beams for the particle velocity line array ($x = 0.5$，that is $d/\lambda = 0.08$)



(a) 未归一化　　　　(b) 归一化

图 6　合成后的 GS 波束及其归一化的波束 ($x = 0.5$，即 $d/\lambda = 0.08$)

Fig. 6　The synthesized GS beampatterns and their normalized versions ($x = 0.5$，that is $d/\lambda = 0.08$)



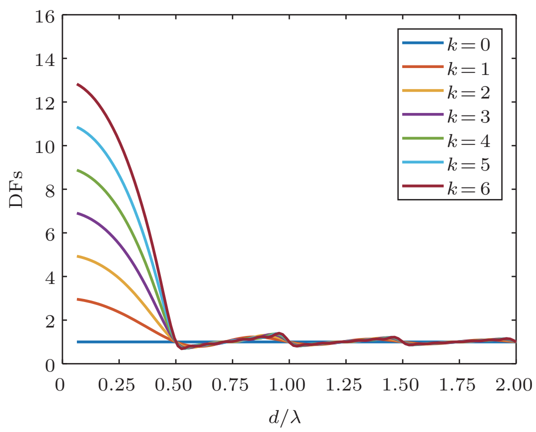
(a) 声压阵　　　　(b) 质点振速阵

图 7　随 d/λ 值变化的 GS 波束图

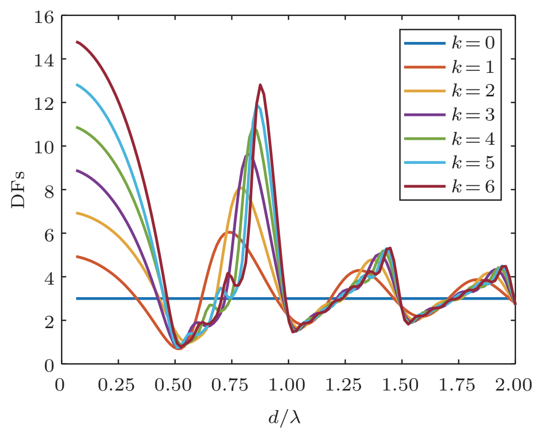
Fig. 7　The synthesized GS beampatterns versus d/λ

图7给出了随d/λ值变化的第0 ~ 6阶波束分量合成后的GS波束图，可以看出质点振速阵的波束主瓣宽度比声压阵略窄；而在旁瓣区域，质点振速阵在±90°附近的旁瓣极低，这是由单个质点振速传感器的接收响应决定的，从式(4)易知，在±90°上的空间响应为0。

图8给出了声压阵和质点振速阵随d/λ值变化的第0 ~ 6阶GS波束的指向性因子(阵增益)。与声压阵相比，质点振速阵的指向性因子在$d/\lambda > 0.5$时振荡幅度较大，在一些频点上依然能够提供较大的指向性因子。



(a) 声压阵



(b) 质点振速阵

图8 随d/λ值变化的GS波束各阶指向性因子

Fig. 8 Different-order directivity factors of GS beampatterns versus d/λ

图9给出了GS波束第0 ~ 6阶指向性因子合成后结果(指向性指数DI，单位：dB)，并将多种波束形成方法进行了对比。对于CBF方法，质点振速阵指向性指数在低频时略高于其对应的声压阵，在高频时，两者的差距进一步增大。声压阵和质点振速阵的GS方法与MVDR方法的指向性指数值重合，验证了GS方法的正确性。乘积定理MVDR方法的指向性指数介于质点振速阵与声压阵之间，这说明乘积定理MVDR方法相当于质点振速阵超指向性方法的一个次优结果。质点振速阵超指向性方法(GS和MVDR)指向性指数变化的振荡幅度较大，可以看到在$d/\lambda = 0.86$、1.42和1.94时出现了较大的峰值点。并且，在$d/\lambda > 0.5$后，质点振速阵的指向性指数比声压阵要大，在部分点上(如d/λ约为0.86)甚至高8.45 dB左右(见图10)。在低频时，质点振速阵的GS方法的指向性指数远远高于CBF方法，声压阵也有类似的性能表现，但是在$d/\lambda > 0.5$之后，声压阵的CBF方法与GS方法基本重合，而质点振速阵在$0.5 < d/\lambda < 1$之间时，GS方法的指向性指数仍然高于CBF方法，然后随着频率的进一步提高，GS方法的指向性指数逐渐与CBF方法接近。

由于η_k与各阶GS模态波束的稳健性有关，其值越大，代表第k阶波束的稳健性越好。从图11(a)与图11(b)的对比可以看出，质点振速阵的各阶稳健性水平略低于声压阵。同时，质点振速阵的稳健性水平有一定的波动，与指向性指数波动的规律一致。

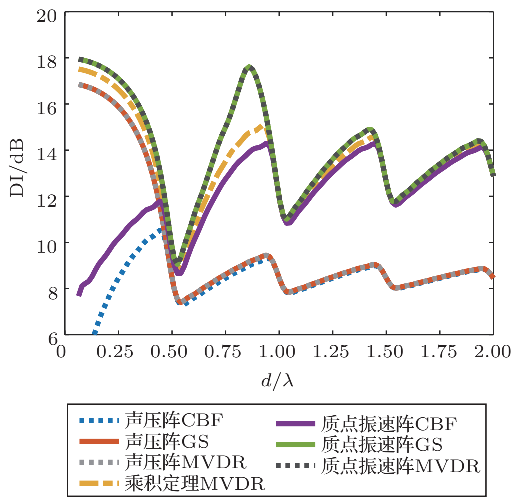


图9 随d/λ变化的CBF、MVDR和GS方法的指向性指数

Fig. 9 Directivity indices of CBF, MVDR and GS beamformers versus d/λ

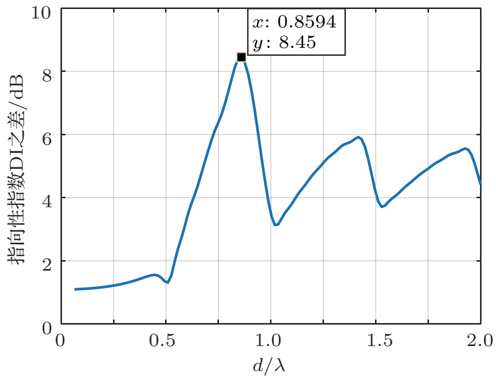
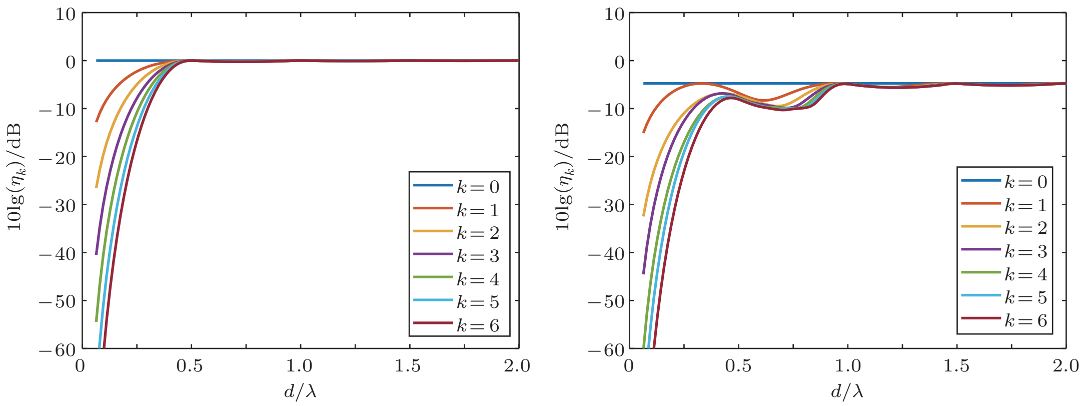


图 10　随 d/λ 变化的质点振速阵超指向性方法的指向性指数与声压阵之差

Fig. 10　The difference of directivity indices between the particle velocity sensor array and the acoustic pressure sensor array

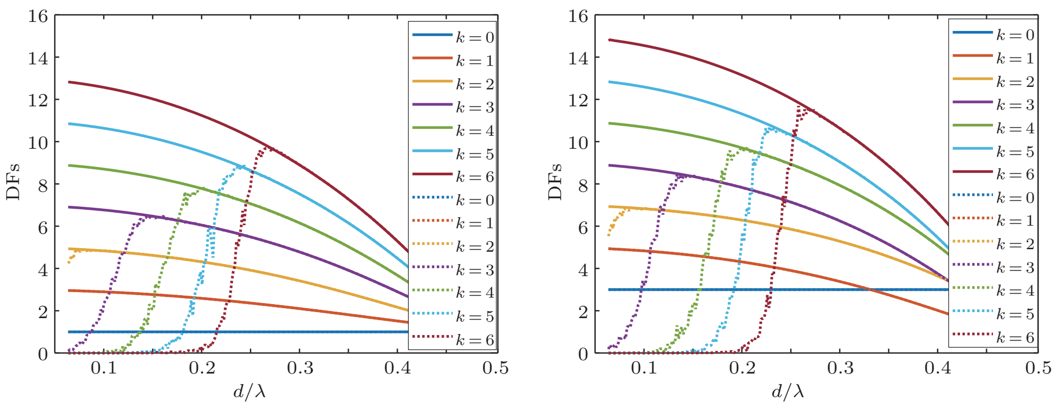
为更好理解图 11 的稳健性水平，图 12 给出了随 d/λ 值变化的 GS 波束理论和有误差时的指向性因子，其中理论指向性因子为实线，是图 8 中的部分截取图；虚线是存在幅度和相位误差的方差均为 10^{-4} 时的指向性因子。由于图 11 中两种阵列的稳健性水平差距不大，质点振速阵的稳健性水平略低，从图 12(a) 和图 12(b) 的对比中可以发现，当 $k = 2$ (黄色线条) 时，质点振速阵的指向性因子到达稳定状态的 d/λ 值略大于声压阵。因此可以说明，质点振速阵的稳健性水平在 d/λ 值一定时比声压阵的要略低一点，这验证了图 11 的准确性。



(a) 声压阵　　　　(b) 质点振速阵

图 11　随 d/λ 的变化的 GS 各阶波束的稳健性水平

Fig. 11　Robustness of different-order GS beampatterns versus d/λ



(a) 声压阵　　　　(b) 质点振速阵

图 12　随 d/λ 值变化的 GS 波束理论 (实线) 和有误差 (虚线) 时的指向性因子

Fig. 12　Different-order directivity factors of GS beampatterns with/without errors versus d/λ

4 结论

本文研究了阵元为单自由度的质点振速传感器且观测方向与基阵轴线重合(端射方向)时的直线阵超指向性波束形成方法。首先研究了两个阵元在三维各向同性空间均匀噪声场中的噪声相关系数，用以计算阵列噪声协方差矩阵中的元素；然后引入了GS模态波束分解与综合超指向性方法，求解了不同阶数下的指向性因子和稳健性水平。仿真结果表明，质点振速阵在阵元间距与波长比大于0.5时的指向性指数远远大于声压阵；相较于传统MVDR方法，GS超指向性方法的稳健性更好，因其指向性因子能够表达为不同阶数的指向性因子之和，可以舍弃不稳健的高阶项而保留较为稳健的低阶项来实现波束形成。本文的研究对质点振速传感器在端射方向的有效组阵具有一定的参考价值。下一步研究可令矢量传感器的观测方向与基阵的轴线垂直时的直线阵波束形成，以期对拖曳线列阵的组阵提供有价值的参考。

参 考 文 献

[1] Nehorai A, Paldi E. Acoustic vector-sensor array processing[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1994, 42(9): 2481–2491.

[2] Hawkes M, Nehorai A. Acoustic vector-sensor beamforming and capon direction estimation[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1998, 46(9): 2291–2304.

[3] 杨德森, 朱中锐, 时胜国, 等. 声矢量圆阵相位模态域目标方位估计 [J]. 声学学报, 2014, 39(1): 19–26.
Yang Desen, Zhu Zhongrui, Shi Shengguo, et al. Direction-of-arrival estimation based on phase modal space for a uniform circular acoustic vector-sensor array[J]. Acta Acustica, 2014, 39(1): 19–26.

[4] 孙贵青, 李启虎. 声矢量传感器信号处理 [J]. 声学学报, 2004, 29(6): 491–498.
Sun Guiqing, Li Qihu. Acoustic vector sensor processing[J]. Acta Acustica, 2004, 29(6): 491–498.

[5] Cron B F, Sherman C H. Addendum: spatial-correlation functions for various noise models[J]. Journal of the Acoustical Society of America, 1962, 34(11): 1732–1736.

[6] D'Spain G L, Luby J C, Wilson G R, et al. Vector sensors and vector sensor line arrays: comments on optimal array gain and detection[J]. Journal of the Acoustical Society of America, 2006, 120(1): 171–185.

[7] Hawkes M, Nehorai A. Acoustic vector-sensor correlations in ambient noise[J]. IEEE Journal of Oceanic Engineering, 2001, 26(3): 337–347.

[8] Capon J. High-resolution frequency-wavenumber spectrum analysis[J]. Proceedings of the IEEE, 1969, 57(8): 1408–1418.

[9] Wang Y, Yang Y, He Z, et al. A general superdirectivity model for arbitrary sensor arrays[J]. EURASIP Journal on Advances in Signal Processing, 2015, 2015(68): 1–16.

[10] Trees V, Harry L. Optimum array processing : Part IV of detection, estimation and modulation theory[M]. State of New Jersey: Wiley, 2002.

[11] Arfken G B, Weber H J, Harris F E. Mathematical methods for physicists[M]. Salt Lake City: Academic Press, 2001.

[12] Harrington R. On the gain and beamwidth of directional antennas[J]. IRE Transactions on Antennas and Propagation, 2003, 6(3): 219–225.

[13] Hirata K, Matsuda S, Nishizawa K, et al. Antenna arrangement method for the suppression of grating lobes of the distributed array antenna[J]. IEICE Technical Report Antennas & Propagation, 2005, 105(59): 35–40.