

◇ 李启虎院士八十华诞学术论文 ◇

# 一种低复杂度的稳健自适应波束形成

毛卫宁<sup>1,2†</sup> 钱进<sup>1</sup>

(1 东南大学信息科学与工程学院 南京 210096)

(2 东南大学网络空间安全学院 南京 210096)

**摘要** 针对目前多数稳健自适应波束形成方法计算复杂度高,在高信噪比时性能下降的问题,研究提出了一种低复杂度的稳健自适应波束形成方法,通过干扰区域空间谱积分重构干扰协方差矩阵,利用信号子空间的投影估计期望信号导向向量,降低计算量,提高稳健性。仿真实验表明,该算法能获得近似最优的输出信噪比和更好的稳健性。

**关键词** 方位估计,稳健自适应波束形成,协方差矩阵重构

中图分类号: TN911.7 文献标识码: A 文章编号: 1000-310X(2019)04-0540-05

DOI: 10.11684/j.issn.1000-310X.2019.04.010

## A low-complexity robust adaptive beamformer

MAO Weining<sup>1,2</sup> QIAN Jin<sup>1</sup>

(1 School of Information Science and Engineering, Southeast University, Nanjing 210096, China)

(2 School of Cyber Science and Engineering, Southeast University, Nanjing 210096, China)

**Abstract** At present, most of robust adaptive beamformers tend to have two problems—One is the higher computational complexity and the other is the cancellation of the desired signal at high SNR. In this paper, a low-complexity robust adaptive beamformer with good robustness is proposed which reconstructs interference covariance matrix using the spatial spectrum integrated in the region of interference and estimates the steering vector of the desired signal using the projection of signal subspace. Simulation results demonstrate that the performance of the proposed method is almost always close to the optimal value.

**Key words** Direction of arrival, Robust adaptive beamforming, Covariance matrix reconstruction

2019-02-13 收稿; 2019-04-05 定稿

作者简介: 毛卫宁 (1963-), 女, 湖南湘潭人, 教授, 研究方向: 水声信号处理。

† 通讯作者 E-mail: maoweining@seu.edu.cn

## 0 引言

传统的自适应波束形成算法大多是建立在理想假设条件下的, 实际情况下, 由于方位失配、阵元位置误差、非理想平面波传播和小样本等因素的影响导致其性能严重下降, 甚至失效。各种稳健自适应波束形成算法应运而生。主要分为四类: 对角加载算法、特征空间算法、不确定集约束算法以及干扰加噪声协方差矩阵重构算法。对角加载算法<sup>[1-2]</sup>可在一定程度上减少失配的影响, 但存在对角加载因子难以确定和零陷变浅等问题; 特征空间法<sup>[3-9]</sup>常用的方法有主分量波束形成算法<sup>[6]</sup>、投影波束形成算法<sup>[7]</sup>和互谱特征子空间波束形成算法<sup>[8-9]</sup>等, 此类算法在信号子空间低秩且信号数目已知时, 对各种类型的导向矢量失配具有较好的稳健性且收敛速度较快, 但在低信噪比情况下, 信号子空间易被噪声子空间污染, 导致算法性能下降甚至完全失效; 基于不确定集约束的稳健波束形成方法<sup>[10-13]</sup>, 如最差性能最优化稳健波束形成 (Worst-case performance optimization, WCPO) 和稳健Capon波束形成 (Robust Capon beamforming, RCB) 等, 其本质上仍属于对角加载方法, 只是求解加载因子的方法不同。由于阵列接收信号中包含期望信号, 这类算法在高信噪比时仍然存在信号抵消现象, 且算法性能受限于导向矢量模约束参数的选取, 需要优化算法求解权向量, 计算复杂度较高, 不利于工程应用; 最近一些学者提出了基于干扰和噪声协方差矩阵重构的稳健算法。文献[14-16]提出基于空间谱积分的干扰和噪声协方差矩阵重构算法, 积分区间为期望信号方向所在区域的补集, 之后通过求解具有二次约束的二次规划 (Quadratically constrained quadratic program, QCQP) 问题估计期望信号的导向矢量, 计算量仍较大。文献[16]提出利用样本协方差矩阵的特征矢量与预估期望信号导向矢量之间的相关性提取期望信号特征分量, 重构干扰和噪声协方差矩阵, 计算量有所降低, 但中高信噪比时输出信噪比 (Signal to interference plus noise ratio, SINR) 下降。针对上述问题, 本文提出了一种低复杂度的稳健自适应波束形成方法, 通过干扰区域空间谱积分重构干扰协方差矩阵, 利用信号子空间的投影估计期望信号导向向量, 降低计算量, 同时保持较好的稳健性。

## 1 信号模型

考虑阵元间距为  $d$  的  $M$  元线列阵,  $N(N < M)$  个远场窄带信号, 期望信号  $s_0(t)$  的入射角度为  $\theta_0$ , 干扰  $s_i(t)$  入射方向为  $\theta_i (i = 1, 2, \dots, N-1)$ , 阵列接收数据可表示为

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}\mathbf{s}(k) + \mathbf{n}(k), \quad (1)$$

式(1)中,  $\mathbf{A} = [\mathbf{a}(\theta_0), \mathbf{a}(\theta_1), \dots, \mathbf{a}(\theta_{N-1})]$  为阵列流形矩阵,  $\mathbf{s}(k)$  为快拍信号矢量,  $\mathbf{n}(k)$  为快拍噪声矢量。

自适应波束形成是在保证期望信号无失真的前提下最小化阵列输出干扰加噪声功率, 数学表示为

$$\min_{\mathbf{w}} \mathbf{w}^H \mathbf{R}_{i+n} \mathbf{w} \quad \text{subject to } \mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta_0) = 1. \quad (2)$$

利用拉格朗日乘子法求解此约束最优化问题, 得到最优权向量

$$\mathbf{w}_{\text{opt}} = \frac{\mathbf{R}_{i+n}^{-1} \mathbf{a}(\theta_0)}{\mathbf{a}^H(\theta_0) \mathbf{R}_{i+n}^{-1} \mathbf{a}(\theta_0)}. \quad (3)$$

实际应用中, 接收数据中常含有期望信号, 一般无法获得干扰加噪声协方差矩阵  $\mathbf{R}_{i+n}$ , 而且由于接收数据长度有限, 真实的接收信号协方差矩阵  $\mathbf{R}_{xx}$  也难以得到, 通常利用样本协方差矩阵替代, 由此得到的波束形成器称为样本矩阵求逆 (Sample matrix inversion, SMI) 波束形成器。样本协方差矩阵定义为

$$\hat{\mathbf{R}}_{xx} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \mathbf{x}(k) \mathbf{x}^H(k), \quad (4)$$

式(4)中,  $K$  为采样快拍个数。

将式(4)代入式(3)得到SMI算法的权向量为

$$\mathbf{w}_{\text{SMI}} = \frac{\hat{\mathbf{R}}_{xx}^{-1} \mathbf{a}(\theta_0)}{\mathbf{a}^H(\theta_0) \hat{\mathbf{R}}_{xx}^{-1} \mathbf{a}(\theta_0)}. \quad (5)$$

由此得SMI算法的功率谱为

$$P_{\text{SMI}}(\theta) = \frac{1}{\mathbf{a}^H(\theta) \hat{\mathbf{R}}_{xx}^{-1} \mathbf{a}(\theta)}. \quad (6)$$

理想情况下SMI算法性能能达到最优, 但SMI算法对模型失配非常敏感, 实际应用中, 由于导向向量失配 (如方位失配、阵元位置误差、非平面波传播等) 和小样本等因素的影响, 产生信号抵消, 导致其性能下降, 甚至失效。

## 2 低复杂度的稳健自适应波束形成

稳健自适应波束形成旨在模型失配情况下,保持自适应波束形成的最优性能,其最优权向量  $\mathbf{w}_{\text{opt}}$ , 可以通过干扰加噪声协方差矩阵  $\mathbf{R}_{i+n}$  和期望信号导向矢量  $\mathbf{a}(\theta_0)$  的联合估计得到,也可以分别估计二者。文献[16]利用SMI波束形成算法的功率谱重构干扰噪声协方差矩阵(Interference plus noise covariance matrix reconstruction, IPNMR),以消除接收信号协方差矩阵中的期望信号,提高自适应波束形成算法的稳健性,重构的干扰噪声协方差矩阵为

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{R}}_{i+n} &= \int_{\bar{\Theta}} \hat{P}(\theta) \mathbf{a}(\theta) \mathbf{a}^H(\theta) d\theta \\ &= \int_{\bar{\Theta}} \frac{\mathbf{a}(\theta) \mathbf{a}^H(\theta)}{\mathbf{a}(\theta) \hat{\mathbf{R}}_{xx}^{-1} \mathbf{a}^H(\theta)} d\theta,\end{aligned}\quad (7)$$

其中,  $\bar{\Theta}$  为干扰和噪声区域,式(7)的算法复杂度为  $O(M^2S)$ ,  $S$  为离散的方位点数。当  $\bar{\Theta}$  较大时,  $S \gg M$ , 式(7)的计算量远大于常规自适应波束形成算法的复杂度  $O(M^3)$ 。为此,考虑分别重构干扰协方差矩阵和噪声协方差矩阵,以减小计算量。

### 2.1 干扰和噪声协方差矩阵重构

对样本协方差矩阵  $\hat{\mathbf{R}}_{xx}$  进行特征分解,表示为

$$\hat{\mathbf{R}}_{xx} = \mathbf{U}_S \mathbf{\Lambda}_S \mathbf{U}_S^H + \mathbf{U}_N \mathbf{\Lambda}_N \mathbf{U}_N^H, \quad (8)$$

式(8)中,  $\mathbf{\Lambda}_S = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N\}$ ,  $\mathbf{\Lambda}_N = \text{diag}\{\lambda_{N+1}, \lambda_{N+2}, \dots, \lambda_M\}$ , 特征值  $\lambda_i$  从大到小排列,  $\mathbf{v}_i$  为与之对应的特征矢量,  $\mathbf{U}_S = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_N]$  为信号子空间,  $\mathbf{U}_N = [\mathbf{v}_{N+1}, \mathbf{v}_{N+2}, \dots, \mathbf{v}_M]$  为噪声子空间。

考虑第  $j$  个干扰所在区域为  $\Theta_j$  ( $j = 1, 2, \dots, N-1$ ), 各干扰所在区域互不重叠,利用功率谱初步估计第  $j$  个干扰的协方差矩阵为

$$\begin{aligned}\mathbf{C}_j &= \int_{\Theta_j} \hat{P}(\theta) \mathbf{a}(\theta) \mathbf{a}^H(\theta) d\theta \\ &= \int_{\Theta_j} \frac{\mathbf{a}(\theta) \mathbf{a}^H(\theta)}{\mathbf{a}(\theta) \hat{\mathbf{R}}_{xx}^{-1} \mathbf{a}^H(\theta)} d\theta.\end{aligned}\quad (9)$$

对协方差矩阵  $\mathbf{C}_j$  进行特征分解有

$$\mathbf{C}_j = \sum_{i=1}^M \lambda_{j-i} \mathbf{v}_{j-i} \mathbf{v}_{j-i}^H, \quad (10)$$

式(10)中,  $\lambda_{j-i}$  ( $i = 1, 2, \dots, M$ ) 为  $\mathbf{C}_j$  的特征值并按降序排列,即  $\lambda_{j-1} \geq \lambda_{j-2} \geq \dots \geq \lambda_{j-M}$ ,  $\mathbf{v}_{j-i}$  为与  $\lambda_{j-i}$  对应的特征向量。

考虑归一化,第  $j$  个干扰的导向矢量估计为

$$\tilde{\mathbf{a}}_j = \sqrt{M} \mathbf{v}_{j-1}, \quad j = 1, 2, \dots, N-1, \quad (11)$$

由于角度集  $\Theta_j$  远小于  $\bar{\Theta}$ ,因而降低了计算量。

干扰协方差矩阵的估计值可表示为

$$\tilde{\mathbf{R}}_i = \sum_{j=1}^{N-1} \tilde{\sigma}_j^2 \tilde{\mathbf{a}}_j \tilde{\mathbf{a}}_j^H, \quad (12)$$

其中,  $\tilde{\sigma}_j^2$  为第  $j$  个干扰的功率,可由SMI波束形成估计。噪声功率的估计值为

$$\tilde{\sigma}_n^2 = \frac{1}{M-N} \sum_{i=N+1}^M \lambda_i, \quad (13)$$

其中,  $\lambda_i$  为接收信号协方差矩阵  $\hat{\mathbf{R}}_{xx}$  的特征值,由此得噪声协方差矩阵的估计  $\tilde{\mathbf{R}}_N = \tilde{\sigma}_n^2 \mathbf{I}$ , 重构的干扰噪声协方差矩阵为

$$\tilde{\mathbf{R}}_{i+n} = \tilde{\mathbf{R}}_i + \tilde{\mathbf{R}}_N = \sum_{j=1}^{N-1} \tilde{\sigma}_j^2 \tilde{\mathbf{a}}_j \tilde{\mathbf{a}}_j^H + \tilde{\sigma}_n^2 \mathbf{I}. \quad (14)$$

### 2.2 期望信号导向矢量估计

类似地,构造矩阵  $\mathbf{D}$  为

$$\mathbf{D} = \int_{\Theta} \mathbf{a}(\theta) \mathbf{a}^H(\theta) d\theta, \quad (15)$$

其中,  $\Theta$  为期望信号所在区域,  $\Theta$  为  $\bar{\Theta}$  的补集。对矩阵  $\mathbf{D}$  进行特征分解,并建立投影  $\mathbf{P}_1 = \mathbf{E}_S \mathbf{E}_S^H$  和  $\mathbf{P}_2 = \mathbf{U}_S \mathbf{U}_S^H$ , 其中  $\mathbf{E}_S$  为矩阵  $\mathbf{D}$  的特征矢量构成的子空间,期望信号的导向矢量为

$$\tilde{\mathbf{a}}_0 = \sqrt{M} \mathbf{P} \{ \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \}, \quad (16)$$

式(16)中,  $\mathbf{P} \{ \cdot \}$  表示取矩阵  $\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2$  最大特征值对应的特征矢量。

根据干扰噪声协方差矩阵的估计值  $\tilde{\mathbf{R}}_{i+n}$  和导向矢量的估计值  $\tilde{\mathbf{a}}_0$ , 由式(3)可得权向量为

$$\mathbf{w} = \mu \tilde{\mathbf{R}}_{i+n}^{-1} \tilde{\mathbf{a}}_0, \quad (17)$$

式(17)中,  $\mu = [\tilde{\mathbf{a}}_0^H \tilde{\mathbf{R}}_{i+n}^{-1} \tilde{\mathbf{a}}_0]^{-1}$ 。

## 3 仿真实验

采用16元均匀线列,阵元间距为二分之一波长,声速为1500 m/s,环境噪声为零均值、方差为1的加性高斯白噪声。期望信号与干扰相互独立,方位为  $3^\circ$ ; 两个相互独立的干扰,方位分别为  $-50^\circ$  和  $50^\circ$ , 干扰噪声比均为  $\text{INR} = 20$  dB。

实验1 阵列输出信干噪比与输入信噪比的关系  
快拍数为200, 输入信噪比变化范围为 $[-20 \sim 50]$  dB。分别比较样本矩阵求逆波束形成(SMI)法、特征空间算法(Eigenspace-based beamformer, ESB)<sup>[3]</sup>和本文算法(Low-complexity robust adaptive beamformer, LCRABF)。图1为三种算法输出SINR随输入SNR变化的关系。图1表明,在低信噪比时,本文算法LCRABF和SMI算法的输出信干噪比接近于最佳输出信干噪比,ESB算法则由于发生子空间缠绕造成性能下降;随着信噪比的增加,本文算法LCRABF的输出信干噪比逐渐增加且趋近于最佳输出信干噪比,而ESB算法和SMI算法输出信干噪比随信噪比增加趋于不变。可见,本文算法LCRABF无论在低信噪比,还是高信噪比情况下都有良好的稳健性。

实验2 阵列输出信干噪比与快拍数的关系

信噪比为 $SNR = 0$  dB; 快拍数变化范围为 $[10 \sim 200]$ , 阵列输出信干噪比随采样快拍数的变化如图2所示。从图中可以看出,本文算法LCRABF

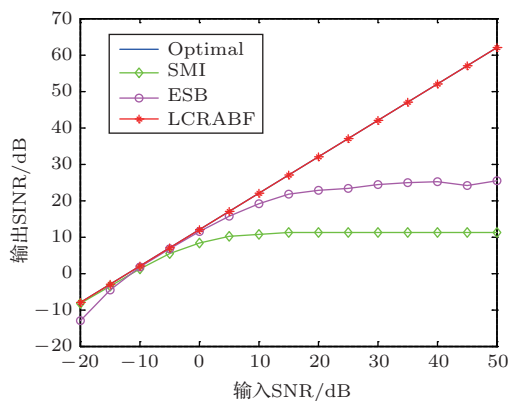


图1 输出 SINR 随输入 SNR 的变化

Fig. 1 Output SINR versus input SNR

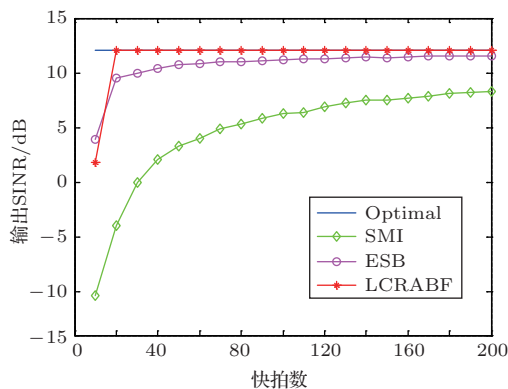


图2 输出 SINR 随快拍数的变化

Fig. 2 Output SINR versus the number of snapshots

能够较快收敛于最佳输出信干噪比,收敛速度明显快于ESB算法和SMI算法,快拍数大于20,输出信干噪比即接近理论最佳值;其次是ESB算法,快拍数大于140时,输出信干噪比接近最佳值;SMI算法的收敛速度最慢。可见,本文算法LCRABF在小样本情况下也具有良好的稳健性。

## 4 结论

自适应波束形成在模型失配情况下,由于信号抵消,导致性能严重下降,限制了其应用范围。稳健自适应波束形成成为这一问题的解决提供了有效途径。但目前多数稳健自适应波束形成算法计算复杂度高,算法性能依赖于经验参数,在高信噪比时仍然存在信号抵消现象。本文研究提出了一种低复杂度的稳健自适应波束形成方法,通过分别重构干扰协方差矩阵和噪声协方差矩阵,消除期望信号的影响,算法计算量小,利于工程实现;在较大信噪比范围内输出信干噪比接近理论最优值,稳健性好。

## 参 考 文 献

- [1] Carlson B D. Covariance matrix estimation errors and diagonal loading in adaptive arrays[J]. IEEE Transactions on Aerospace Electronic Systems, 1988, 24(4): 397-401.
- [2] Mestre X, Lagunas M A. Estimating the optimum loading factor against the finite sample size effect in minimum variance beamformers[C]. Processing Workshop Proceedings, 2004 Sensor Array and Multichannel Signal, 2004: 357-361.
- [3] Feldman D D, Griffiths L J. A constraint projection approach for robust adaptive beamforming[C]. International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, 1991, 2: 1381-1384.
- [4] Feldman D D. An analysis of the projection method for robust adaptive beamforming[J]. IEEE Transactions on Antennas & Propagation, 1996, 44(7): 1023-1030.
- [5] Li J, Stoica P, Wang Z. Doubly constrained robust capon beamformer[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2004, 52(9): 2407-2423.
- [6] Chang L, Yeh C C. Performance of DMI and eigenspace-based beamformers[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1992, 40(11): 1336-1347.
- [7] Feldman D D, Griffiths L J. A projection approach for robust adaptive beamforming[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1994, 42(4): 867-876.
- [8] Goldstein J, Reed I. Reduced rank adaptive filtering[J]. IEEE Transactions on Aerospace Electronic Systems, 1997, 45(2): 492-496.

- [9] Goldstein J, Reed I. Subspace selection for partially adaptive sensor array processing[J]. *IEEE Transactions on Aerospace Electronic Systems*, 1997, 33(2): 539–544.
- [10] Li J, Stoica P, Wang Z. On robust capon beamforming and diagonal loading[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2003, 51(7): 1702–1715.
- [11] Vorobyov S A, Gershman A B, Luo Z Q. Robust adaptive beamforming using worst-case performance optimization: a solution to the signal mismatch problem[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2003, 51(2): 313–324.
- [12] Elnashar A, Elnoubi S M, EL-Mikati H A. Further study on robust adaptive beamforming with optimum diagonal loading[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2006, 54(12): 3647–3658.
- [13] Shahram S, Gershman A B, Luo Z, et al. Robust adaptive beamforming for general-rank signal models[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2003, 51(9): 2257–2269.
- [14] Gu Y, Leshem A. Robust adaptive beamforming based on jointly estimating covariance matrix and steering vector[C]. in *Proc. Int. Conf. Acoust. Speech and Signal Processing (ICASSP)*, Prague, Czech Republic, May, 2011: 2640–2643.
- [15] Gu Y, Leshem A. Robust adaptive beamforming based on interference covariance matrix reconstruction and steering vector estimation[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2012, 60(7): 3881–3885.
- [16] Hu X, Yu T, Zhang X, et al. Robust adaptive beamforming using interference covariance matrix reconstruction[C]. *2016 CIE International Conference on Radar (RADAR)*, Guangzhou, 2016: 1–4.