

◇ 李启虎院士八十华诞学术论文 ◇

环境适应处理方法*

王宁[†] 王鹏宇 宋文化

(中国海洋大学信息科学与工程学院 青岛 266003)

摘要 文章介绍了作者及其合作者近十年在环境适应处理方法方面的研究及其相关国内外研究,包括数据驱动匹配场处理、波导不变量应用及其数据驱动格林函数提取与单边声场聚焦方法。并讨论了各种方法存在的问题及可能的研究方向。

关键词 数据驱动,波导不变量,格林函数提取

中图法分类号: O422; O427

文献标识码: A

文章编号: 1000-310X(2019)04-0484-06

DOI: 10.11684/j.issn.1000-310X.2019.04.003

Environmentally adaptive signal processing

WANG Ning WANG Pengyu SONG Wenhua

(College of Information Science and Engineering, Ocean University of China, Qingdao 266003, China)

Abstract In this paper, we summarize our recent works on environmentally adaptive signal processing in underwater and related studies, including data-driven matched field processing, applications of wave-guide invariant, Green's function retrieval and single side-focusing methods. We also comment on relevant future directions.

Key words Data driven, Waveguide invariant, Green's function retrieval

2019-02-14 收稿; 2019-03-25 定稿

*国家自然科学基金项目 (11674294)

作者简介: 王宁 (1962-), 男, 内蒙古人, 博士, 教授, 研究方向: 海洋声学。

[†] 通讯作者 E-mail: wangning962725@ouc.edu.cn

0 引言

声波是实现全海深、长距离信息传输的最有效波动形式,水声技术在海洋科技和声呐工程应用等具有不可替代的作用^[1]。声传播特性依赖于海洋声学环境,即所谓环境效应或称信道效应。环境效应在许多应用中可以校正或补偿,譬如通过自适应均衡、时间反转方法。然而,在诸如主被动水声探测应用中,由于难以提供校正用导引/测试信号且无先验环境特性,许多自适应处理方法无法应用。水声匹配场处理是一个典型例,环境失配是传统匹配场处理的主要障碍之一^[2-5]。所谓环境适应处理方法目的是尽可能降低处理方法对环境信息的依赖性和鲁棒性。

环境自适应水声信号处理概念可以追溯到 Wolf^[6] 的文章,而正式采用环境自适应水声信号处理概念源于上述作者及合作者在 Oceans'93 的会议论文^[7], environmentally adaptive signal processing (EASP)。按照 Wolf 等^[7] 的定义,环境自适应水声信号处理方法无需假设任何环境信息,如声速剖面、地声参数等。文献常采用“数据驱动”一词强调处理方法无需假设环境模型。随着匹配场失配问题认识的深入,在过去二十年间,水声物理发展在很大程度上总与 EASP 有关联。同时,环境自适应水声信号处理研究使得水声物理和信号处理两个不同的研究方向得到很大的融合。

本文主要总结第一作者及合作者在过去近十年的相关工作,特别加入了近两年部分工作,着重 EASP 方法的水声物理部分及各种方法间的关系和理论条件。文章采用矩阵形式描述,这样可以在简正波理论框架下提供水声传播特性统一的描述。文章没有过多涉及方法的实验验证,相关内容可参考有关文献。文章第3节介绍了近年在地球物理勘探领域较为流行的数据驱动声场聚焦方法,希望这些内容会对水声学研究有所帮助。

1 数据驱动环境模型估计

水平不变波导中的低频、远场点声源的垂直阵声压,利用简正波理论可以表示为

$$\mathbf{P} = [\Phi]\mathbf{a}, \quad (1)$$

其中,声压阵矢量表示 M 个水听器的接收,矩阵 $[\Phi]_{M \times N}$ 表示垂直阵简正波接收权重矩阵(参考附录 A),矢量 \mathbf{a} 表示 N 个简正波的相位调制激发矢量(包含源频谱),包含简正波的水平相移和源简正波深度分布权重。互谱密度矩阵定义为

$$\mathbf{C} \equiv \mathbf{P}\mathbf{P}^+ = [\Phi]\mathbf{a}\mathbf{a}^+[\Phi]^+. \quad (2)$$

假设矩阵 $[\Phi]$ 是酉(矩)阵(全海深阵近似满足),公式(2)具有奇异值分解形式,其对角矩阵对应源简正波深度分布权重幅度及频谱。利用上述公式可以直接由数据获取声源的简正波深度分布权重幅度 $|a_n|$, $n = 1, 2, \dots, N$, 同时矩阵 $[\Phi]$ 包含接收阵的局部简正波垂直分布。Hursky 等^[8] 利用这一特性,在已知声速剖面假设下在反演地声参数基础上,开展了基于“数据驱动的匹配场”方法研究。然而,上述方法无法直接从数据中获取简正波水平波数,必须先做环境参数反演。移动声源的声场距离变化包含水平波数信息, Yang^[9] 同时利用汉克尔变换获取水平波数信息,从而实现“全数据驱动”匹配场处理。

环境自适应处理方法将声场的简正波表示写作矩阵形式以便于应用信号处理方法。Neilsen 等^[10] 给出了单频移动声源-垂直阵接收、窄带声源-垂直阵接收两种情形声压矩阵表示形式,

$$[\mathbf{P}] = e^{i\pi/4}\Phi\mathbf{A}\mathbf{R}, \quad (3)$$

$$[\mathbf{P}]_f = e^{i\pi/4}\Phi\mathbf{A}\mathbf{F}, \quad (4)$$

其中,对角阵矩阵 \mathbf{A} 表示源简正波深度分布权重,矩阵 $[\mathbf{P}]$ 、 $[\mathbf{P}]_f$ 是垂直阵简正波接收权重矩阵,两者的差异在于最右端传播矩阵,分别刻画移动和窄带多频点声源相移。在一定条件下,矩阵 Φ 、 \mathbf{R} 和 \mathbf{F} 近似满足酉(矩)阵,从而同样可以采用奇异值分解方法得到局部简正波垂直分布^[10]。

时反技术/相位共轭^[11-12] 发展与上述方法基本独立,处理方法有类似之处,

$$\mathbf{P}^+\mathbf{P} \approx \mathbf{a}^+\mathbf{a}, \quad (5)$$

可以视作另一类环境自适应处理方法。简正波本征函数基的完备性证明:式(5)右端标量作为距离-深度的函数在声源处聚焦,故称时反/相共轭聚焦。时反方法的物理基础基于波动方程时间反转对称性,当存在吸收时,吸收导致的影响无法补偿。

本节所描述的环境自适应处理方法具有相同的共性:(1)数据驱动;(2)基于简正波理论,其中简

正波函数基底的正交、完备性性质非常关键。为了满足这些条件,接收阵长一般有一定要求。上述方法的共同的弱点是所有推导和处理基于水平不变波导假设。水平变化波导很难再应用上述概念,耦合矩阵一般也不再满足酉(矩)阵特性,会导致明显的声场退相干。我们可以构造与传播矩阵无关的传播不变量^[13],但是也会损失距离信息,这种传播不变量在环境参数反演等应用中有特殊意义。

2 波导不变量

20世纪80年代初,俄罗斯学者发现海洋声场具有稳定的距离-频率干涉结构,90年代,Chuprov^[14]用简正波的频散特性解释了上述现象,并定义了波导不变量(waveguide invariant) β 的值来表征距离-频率面上输出声压幅度的条纹的变化,

$$\beta = r/\omega(\partial\omega/\partial r)_{I=\text{const}}. \quad (6)$$

对于一般水平不变波导,复数声压的幅度平方可以写作非相干和相干两部分。相干部分决定了声场的干涉条纹,Grachev^[15]证明以下模间频散关系

$$k_n - k_m \approx \gamma_{nm}\omega^{-\beta}. \quad (7)$$

对于浅海声信道, β 近似是一个“常数”。而实际上波导不变量是频率、模态号、环境参数的一个复杂函数^[16]。波导不变量概念有不同的应用,譬如纵向相干补偿^[17]。考虑简正波高频频散弱特性,文献[18-19]进一步将公式(6)近似为以下形式:

$$k_n(\omega) \approx \omega/c_n + \gamma_n\omega^{-\beta}, \quad (8)$$

并提出了一种消频散变换,

$$\begin{aligned} & p(r, z; r', \gamma') \\ &= \frac{\pi}{2} \int p(r, z; \omega) \exp[-i(\omega/c_0 r' + \gamma' \omega^{-\beta} r')] d\omega, \end{aligned} \quad (9)$$

改变换可以消除频散。

波导不变量概念是简正波频散的高频端特性,通常只能用于频率大于艾利相的频段,对于频率在截至频率到艾利相附近区域的频率一般不成立。在截至(略高)频率附近,以下公式近似成立:

$$k_n = \text{sqrt}(k^2 - k_{nc}^2). \quad (10)$$

Touzé等^[20]将信号处理中的Warping变换引入水声,利用这种变换可以将每一个简正波模态频散曲

线变换到对应的截至频率的直线,并用于模态分离和测距。

Zhou等^[21]讨论了声场自相关的Warping变换,Niu等^[22]应用WKBZ简正波方法改进了文献的结果包含了海底反射相移的影响。将Warping变换应用于公式(7)形式的频散关系称之为 β -Warping。

以上波导不变量概念及其推广基本都是基于宽带信号。在2014年前后,作者的研究室开始考虑波导不变量在多根线谱问题的应用。其基本物理想法是波导不变量概念的物理基础是简正波的模态频散满足幂函数型函数关系,宽带距离-频率干涉条纹在距离-频率平面构成连续条纹,同样对于不同线谱的距离干涉条纹之间也应该满足相似的约束条件。这种约束条件可以用于目标距离估计^[23]。

无论消频散变换或Warping变换,本质上都属于傅里叶变换的变形,与时反或相位共轭方法原理是相同的,关键在于充分利用波导频散曲线的函数形式规律性和多参数积分变换的性质(相位)。其差别在于:后者的应用要求引导声源或者波导的环境参数已知,而前者对环境参数依赖性较弱,一般只假设模态频散的函数形式,其中参数可以利用数据直接获取。从这个意义上,消频散变换和Warping变换具有环境自适应性质。数学上,消频散或Warping变换本身是一类unitary变换或者更广义的群流形上的调和和分析例子^[24],原理上可以用于任意频散形式。

波导不变量与第1节讨论的数据驱动环境自适应方法一样,假定所讨论问题的波导属于水平不变波导。对于一般水平变化绝热波导同样可以应用波导不变量概念^[25]。但当考虑随机内波环境,由于简正波耦合,Rousself^[26]通过数值仿真计算表明:利用声场干涉条纹直接提取 β -数值一般具有一定分布。Song等^[27]进一步研究了强非线性内波对于声场退相干机理及其条纹空间谱,对于孤子内波环境常规的波导不变量概念,干涉空间谱会出现明显的多峰结构,并讨论了这些结构与孤子内波位置的关系,同时理论上解释了Rousself的数值仿真结果。波导不变量相关概念应用要求高信噪比声场干涉结构,环境起伏退相干是主要障碍。

3 格林函数重构与单边聚焦

利用环境噪声的互相关处理提取格林函数是近十余年地球物理、超声和水声领域一个相对活跃的研究方向^[28-29],是经典互易定理的应用例。两点或者两条阵之间的声场数据互相关与两者之间的声场格林函数有关。

$$G(x_A, x_B, \omega) + G(x_A, x_B, \omega)^* \propto \oint_{\partial C} G(x_A, x, \omega) G(x, x_B, \omega)^* dS, \quad (11)$$

其中, ∂C 表示包含观测点 x_A, x_B 的一个闭合曲面。这种方法可以应用在复杂介质的声场和弹性波场数值计算。计算中无需计算三维空间任意两点间的格林函数,只需计算包含感兴趣区域的一个封闭曲面上均匀分布的随机噪声源产生的声场即可^[30]。从应用角度,公式(8)的应用条件过分苛刻,需要一个封闭面上的观测数据才能够重构内部两点的声场格林函数。但是实际应用中,在稳相近似下两点间的互相关主要来自端线方向的噪声或声源。这种性质在水声应用中被用于阵间波阵面提取^[31]、声层析^[32]、环境噪声被动成像^[33]、混响背景的声源定位^[34]及其海底声学参数反演与被动测深^[35-36]。

单边聚焦方法与格林函数重构方法密切关联,同样是互易定理的应用。单边聚焦又称 Marchenko imaging,最早源于 Rose^[37]关于一维薛定谔方程的工作。Rose 证明:通过求解无束缚态势散射问题的逆散射 Marchenko 方程,

$$\Omega(-\tau; x_0) + R(\tau + x_0) + \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau' R(\tau + \tau') \Omega(-\tau'; x_0) = 0, \quad (12)$$

可以由宽带反射系数设计入射信号波形实现在未知一维势场中任意一点单边聚焦。在此基础上,2012年, Brogini 等^[38]的工作是实质性的,他们提出一种对于一维未知介质构造虚拟点源的方法。Zhang 等^[39]利用分层离散介质模型给出了单边聚焦物理直观图像,并提出一种求解一维离散 Marchenko 方程的严格求解方法并直观地解释了 Brogini 等的工作。

与时反方法不同,这类方法只需要反射信息,故被称为单边聚焦。由于入射波形设计需要通

过求解逆散射 Marchenko 方程,所以又被称之为 Marchenko imaging。Wapenaar 等^[40]将一维单边聚焦推广到三维声散射问题,尽管这套方法数学并非严格,但高维 Marchenko 成像方法是近些年波动反射成像的一个重要突破。与格林函数重构方法不同, Marchenko 成像方法理论上无需在封闭表面测量,而只需要单侧测量,譬如地球勘探应用中的反射数据。由于这一特性,这种方法在地球物理和超声应用中有着潜在的应用前景。单边聚焦方法的本质是基于波动传播的因果特性,利用后续的入射波逐层抵消前期入射波产生的反射和多次散射波^[39]。当结合正演计算模型,这种方法可以推广到三维声学介质,最近 Berkhout^[41]详细讨论了这种处理框架,称之为 data linearization。Neut 等^[42]详细讨论了不同聚焦处理的差异,并且客观地综述了截至 2017 年不同作者的主要贡献。

Marchenko 成像方法在水声学的应用至今尚未见到,主要原因是水声学更多地关注正向传播问题。本地混响是典型的反向散射问题,近距离混响可以将介质镜像拓扑延拓为起伏界面的分层介质问题。通过这种处理, Marchenko 成像方法有可能用于混响抵消问题。这种方法与一般基于 Fink 的迭代时间反转处理 (Iterative time reversal processing, ITRP) 的差异有待澄清。

一般弹性介质的 Marchenko 成像问题尚有待深入研究,其主要物理问题是弹性 P 波和 SV 波在介质散射过程会相互转换,为了消除这些多次回波必须有效地区分散射回波的属性。数学上,为了构造一定解析特性的解,必须引入一定的辅助解,而这种解在经典介质传播问题中的构造一般需要介质的传播时间结构,因此数学物理的逆散射理论一般要求有较大技术改进。data linearization 在数学上似乎有些缺陷,但是原理上可以解决这个问题^[41]。

4 结论

过去几十年的研究,从水声物理角度始终局限于水平不变或绝热环境相关问题,介质起伏、水平变化波导(甚至三维效应)环境的探测问题研究相对少,消除、有效地利用海洋信道效应发展环境适应水声信号处理方法仍在途中。最后,深度学习方法在水声技术的应用是近年的一个热点,在提高分辨率和起伏抑制等方面有潜在的应用价值^[43-46]。小

样本、环境不确定和分类/预测结果的可解释性问题目前尚鲜有报道。但是,随着深度学习方法的普及进入水声行业的门槛会变低,给水声探测与辨识应用乃至水声行业带来了新的机遇与挑战。然而,作者认为:水声物理基础研究的重要性越显重要,水声物理是实现可解释、可信深度学习应用的关键。

本文主要总结了作者及合作者近十年的研究结果及其密切相关的国内外研究。由于作者阅读范围和知识所限,难免有遗漏和疏忽,敬请读者谅解。

参 考 文 献

- [1] 李启虎. 进入 21 世纪的声纳技术[J]. 应用声学, 2002, 21(1): 13-18.
Li Qihu. Sonar technology enters the 21st century[J]. Applied Acoustics, 2002, 21(1): 13-18.
- [2] Buckner H P. Use of calculated sound fields and matched field detection to locate sound sources in shallow water[J]. Journal of the Acoustical Society of America, 1976, 59(2): 368-373.
- [3] 何怡, 张仁和. WKBZ 简正波理论应用于匹配场定位[J]. 自然科学进展, 1994, 4(1): 118-122.
- [4] 马远良. 匹配场处理——水声物理学与信号处理的结合[J]. 电子科技导报, 1996(4): 9-12.
- [5] Baggeroer A B, Kuperman W A, Mikhalevsky P N. An overview of matched field methods in ocean acoustics[J]. IEEE Oceanic Engineering, 1993, 18(4): 401-424.
- [6] Wolf S N. Experimental determination of modal depth functions from covariance matrix eigenfunction analysis[J]. Journal of the Acoustical Society of America, 1987, 81(S1): S64.
- [7] Wolf S N, Cooper D K, Orchard B J. Environmentally adaptive signal processing in shallow water[C]. Oceans '93, Engineering in Harmony with Ocean Proceedings IEEE, Piscataway, NJ, 1993.
- [8] Hursky P, Hodgkiss W S, Kuperman W A. Extracting modal structure from vertical array ambient noise data in shallow water[J]. Journal of the Acoustical Society of America, 1995, 98(5): 2971.
- [9] Yang T C. Data-based matched-mode source localization for a moving source[J]. Journal of the Acoustical Society of America, 2014, 135(3): 1218-1230.
- [10] Neilsen T B, Westwood E K. Extraction of acoustic normal mode depth functions using vertical line array data[J]. Journal of the Acoustical Society of America, 2002, 111(2): 748-756.
- [11] Fink M, Prada C, Wu F, et al. Self-focusing in inhomogeneous media with time reversal acoustic mirrors[J]. IEEE Ultrasonics Symposium, 1989, 2: 681-686.
- [12] Wu F, Thomas J L, Fink M. Time reversal of ultrasonic fields II: experimental results[J]. IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control, 1992, 39(5): 567-578.
- [13] 王鹏宇. 线性信号系统与信号不变量: 光度变换微分与声传播不变量[D]. 青岛: 中国海洋大学, 2019.
- [14] Chuprov S D. Interference structure of a sound field in a layered ocean[M]//Brekhovskikh L M, Andreev L B. Acoustics of the ocean: current status. Moscow, 1982: 71-79.
- [15] Grachev G A. Theory of acoustic field invariants in layered waveguides[J]. Acoustical Physics, 1993, 39: 33-35.
- [16] Zhao Z D, Wu J R, Shang E C. How the thermocline affects the value of the waveguide invariant in a shallow-water waveguide[J]. Journal of the Acoustical Society of America, 2015, 138(1): 223-231.
- [17] Zhang R H, Su X X, Li F. Improvement of low-frequency acoustic spatial correlation by frequency-shift compensation[J]. Chinese Physics Letters, 2006, 23(6): 1838-1841.
- [18] Wang N. Dispersionless transform and potential applications in ocean acoustics[C]. Presentation in the 9th Western Pacific Acoustics Conference, 2009.
- [19] Gao D, Wang N, Wang H. A dedispersion transform for sound propagation in shallow water waveguide[J]. Journal of Computational Acoustics, 2010, 18(3): 245-257.
- [20] Touzé G L, Nicolas B, Mars J I, et al. Matched representations and filters for guided waves[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2009, 57(5): 1783-1795.
- [21] Zhou S H, Qi Y B, Ren Y. Frequency invariability of acoustic field and passive source range estimation in shallow water[J]. Science China: Physics, Mechanics and Astronomy, 2014, 57(2): 225-232.
- [22] Niu H, Zhang R, Li Z. Theoretical analysis of warping operators for non-ideal shallow water waveguides[J]. Journal of the Acoustical Society of America, 2014, 136(1): 53-65.
- [23] 翟林, 高大治, 王好忠, 等. 基于波导不变量的双线谱测距多值性机理研究[J]. 2016年全国声学学术会议, 2016.
- [24] Baraniuk R, Jones D. Unitary equivalence: a new twist on signal processing[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1995, 43(9): 2269-2282.
- [25] DSpain G L, Kuperman W A. Application of waveguide invariants to analysis of spectrograms from shallow water environments that vary in range and azimuth[J]. Journal of the Acoustical Society of America, 1999, 106(5): 2454-2468.
- [26] Rouseff D. Effect of shallow water internal waves on ocean acoustic striation patterns[J]. Waves Random Media, 2001, 11(4): 377-393.
- [27] Song W H, Wang N, GAO D, et al. The influence of mode coupling on waveguide invariant[J]. Journal of the Acoustical Society of America, 2017, 142(4): 1848-1857.
- [28] Wapenaar K, Thorbecke J, van der Neut J, et al. Marchenko imaging[J]. Geophysics, 2014, 79(3): WA39-WA57.
- [29] van der Neut J, Wapenaar K, Thorbecke J, et al. An illustration of adaptive Marchenko imaging[J]. Leading Edge, 2015, 34(6): 818-822.
- [30] Davydenko M, Verschuur D J. Full-wavefield migration-

- using surface and internal multiples in imaging[J]. *Geophysical Prospecting*, 2017, 65(1): 7–21.
- [31] Roux P, Kuperman W A, NPAL Group. Extracting coherent wave fronts from acoustic ambient noise in the ocean[J]. *Journal of the Acoustical Society of America*, 2004, 116(4): 1995–2003.
- [32] Godin O A, Brown M G, Zabolin N A, et al. Passive acoustic measurement of flow velocity in the Straits of Florida[J]. *Geoscience Letters*, 2014, 1: 16.
- [33] Li J, Gerstoft P, Gao D Z, et al. Localizing scatterers from surf noise cross correlations[J]. *Journal of the Acoustical Society of America*, 2017, 141(1): EL64–EL69.
- [34] Li X, Yu G, Wang N, et al. Flux projection beamforming for monochromatic source localization in enclosed space[J]. *Journal of the Acoustical Society of America*, 2017, 141(1): EL1–EL5.
- [35] Gerstoft P, Hodgkiss W S, Siderius M, et al. Passive fathometer processing[J]. *Journal of the Acoustical Society of America*, 2008, 123(3): 1297–1305.
- [36] Siderius M, Harrison C H, Porter M B. A passive fathometer technique for imaging seabed layering using ambient noise[J]. *Journal of the Acoustical Society of America*, 2006, 120(3): 1315–1323.
- [37] Rose J H. Single-sided autofocusing of sound in layered materials[J]. *Inverse Problems*, 2002, 18(6): 1923–1934.
- [38] Brogini F, Snieder R, Wapenaar K. Focusing the wave field inside an unknown 1D medium: beyond seismic interferometry[J]. *Geophysics*, 2012, 77(5): A25–A28.
- [39] Zhang Y, Wang N, Wang P. One-dimensional single-sided acoustic focusing in a Goupillaud layered model[J]. *Journal of the Acoustical Society of America*, 2014, 136(5): 2381–2388.
- [40] Wapenaar K, Brogini F, Slob E, et al. Three-dimensional single-sided Marchenko inverse scattering, data-driven focusing, Green’s function retrieval, and their mutual relations[J]. *Physical Review Letter*, 2013, 110(7): 084301.
- [41] Berkhout A J. Utilization of multiple scattering: the next big step forward in seismic imaging[J]. *Geophysical Prospecting*, 2017, 65: 106–145.
- [42] van der Neut J, Brackenhoff J, Staring M, et al. Single- and double-sided Marchenko imaging conditions in acoustic media[J]. *IEEE Transactions on Computational Imaging*, 2018, 4(1): 160–171.
- [43] Niu H, Reeves E, Gerstoft P. Source localization in an ocean wave-guide using supervised machine learning[J]. *Journal of the Acoustical Society of America*, 2017, 142(3): 1176–1188.
- [44] Huang Z, Xu J, Gong Z, et al. Source localization using deep neural networks in a shallow water environment[J]. *Journal of the Acoustical Society of America*, 2018, 143(5): 2922–2932.
- [45] Wang Y, Peng H. Underwater acoustic source localization using generalized regression neural network[J]. *Journal of the Acoustical Society of America*, 2018, 143(4): 2321–2331.
- [46] Halkias X C, Paris S, Glotin H. Classification of mysticete sounds using machine learning techniques[J]. *Journal of the Acoustical Society of America*, 2013, 134(5): 3496–3505.

附录 A

$$\Phi = \begin{bmatrix} \varphi_1(z_1) & \varphi_2(z_1) & \cdots & \varphi_N(z_1) \\ \varphi_1(z_2) & \cdots & & \\ \cdots & & & \\ \varphi_1(z_M) & & & \varphi_N(z_M) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} \frac{e^{ik_1 r}}{\sqrt{k_1 r}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{e^{ik_2 r}}{\sqrt{k_2 r}} & & \\ \cdots & & \cdots & \\ \cdots & & & \frac{e^{ik_N r}}{\sqrt{k_N r}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1(z_s) \\ \cdots \\ \cdots \\ \varphi_N(z_s) \end{bmatrix}$$