第 38 卷 第 4 期
2019 年 7 月

应用声学
Journal of Applied Acoustics

Vol. 38, No. 4
July, 2019

◇ 李启虎院士八十华诞学术论文 ◇

正交曲线坐标系在变化地形声场计算中的应用*

高善国[1,2†] 李淑秋[1,2] 王桂喜[1,2]

(1 中国科学院先进水下信息技术重点实验室 北京 100190)

(2 中国科学院声学研究所水声工程中心 北京 100190)

摘要 变化地形声场计算是越来越经常碰到的情况。变化地形往往给声场计算带来计算量增大、求解精度下降的问题。坐标系选择是声场计算中非常重要的问题，该文研究基于地形的合适正交曲线坐标系选取规则。在此坐标系中求解 Helmholtz 方程，能够极大简化求解过程，提高计算精度。结合简正波理论，从新的角度展示了正交曲线坐标系在某些典型变化地形线源声场计算问题中的应用。对于几种典型的海洋声波导问题，可以利用合适的曲线坐标系简化问题，给出更直观的物理图像。

关键词 声场计算，正交曲线坐标系，Helmholtz 方程

中图法分类号: O427.1 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-310X(2019)04-0688-09

DOI: 10.11684/j.issn.1000-310X.2019.04.028

Applications of orthogonal curvilinear coordinates in sound field computation with non-flat sea floor

GAO Shanguo[1,2] LI Shuqiu[1,2] WANG Guixi[1,2]

(1 *Key Laboratory of Science and Technology on Advanced Underwater Acoustic Signal Processing, Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100190, *China*)

(2 *Underwater Acoustic Engineering Center, Institute of Acoustics, Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100190, *China*)

Abstract Sound field computations with non-flat sea floor are more and more popular now. Variation of sea floor brings problems like increasing calculation quantity or reducing the accuracy. Selection of coordinate system in sound field computation is very important. In the paper, we study the selection method of suitable coordinate system based on topography, which can improve computation accuracy and reduce calculation load greatly. Combined with normal modes theory, we show applications of orthogonal curvilinear coordinates in sound field computation with some typical non-flat sea floor and line source from a new perspective. For several typical problems of ocean acoustic waveguide, we can simplify the problem by using suitable curvilinear coordinate system and give more intuitive physical images.

Key words Sound field computation, Orthogonal curvilinear coordinates, Helmholtz equation

2019-03-04 收稿; 2019-05-07 定稿

*国家自然科学基金项目 (11504402) , 领域基金项目 (1826140451020116ZK02001)

作者简介: 高善国 (1984-), 男, 山东临沂人, 博士, 副研究员, 研究方向: 水声信号处理、海洋声学。

† 通讯作者 E-mail: sggao@mail.ioa.ac.cn

0 引言

正交曲线坐标系坐标线可为曲线，是满足过任何一点的坐标曲线都要两两垂直的曲线坐标系。通常使用的坐标系大都为正交曲线坐标系，比如直角坐标系、柱坐标系、球坐标系等。

声场计算问题不依赖于坐标系，但合适的坐标系能极大简化求解过程，提高计算精度，甚至可得到 Helmholtz 方程的解析解。以海洋中点声源和线声源问题为例，点声源通常使用轴向垂直并过声源的柱坐标系进行求解，而线声源通常使用直角坐标系即可。这说明不同的声源类型适合用不同坐标系，海底地形同样如此，不同的海底地形也有不同的最合适坐标系。

实际上，曲线坐标系已经在很多科学领域进行了大量应用 [1]。在物理海洋学领域，σ-坐标系、等密度坐标系以及混合坐标系都有很成熟的应用。例如，常用的海洋模式 MITgcm 使用直角坐标系，Hycom 使用混合坐标系，MICOM 使用等密度坐标系，特别是 ROMS 模式，主要处理近海区域海流受海底地形影响的情况，采用与海底地形相符合的 σ-坐标系。在地球物理领域，在同样受 Helmholtz 方程控制的地震波计算中使用曲线坐标系，可以提高计算模型的计算精度和应用范围 [2−3]。

在声场计算问题中，坐标系的选取主要由声源类型和计算区域边界的几何特征决定 [4]。点声源问题在直角坐标系、球坐标系、柱坐标系都可求解，但如果同时考虑海洋分层结构及水平海底，最适合的坐标系是轴向垂直并过声源的柱坐标系。水平海底情况下的线声源，最合适的坐标系是直角坐标系，而如果是斜坡海底，则最合适的坐标系是轴向与线声源平行的柱坐标系。通常海底地形有各种复杂情况，给声场计算带来不少困难。利用海底地形选取合适的正交曲线坐标系进行声场计算是一个必要且重要的研究课题。类似于水平海底在直角坐标系的情况，某些与坐标曲线相符合的典型海底也可在相应的正交曲线坐标系中利用分离变量法求取解析解 [5−6]。

本文首先从 Helmholtz 方程在正交曲线坐标系中的普适性表达式出发，研究基于海底地形的正交曲线坐标系选取规则，并结合简正波理论，展示其在多种典型海底情况下线源声场计算问题中的应用。

1 Helmholtz 方程在一般正交曲线坐标系的表达式

声场计算一般需要在频域中求解 Helmholtz 方程。在本节，基于坐标系间的变换理论，从直角坐标系出发推导 Helmholtz 方程在正交曲线坐标系的普适性表达式。众所周知，在海水等密度情况下若设 $p(x,y,z)$ 为声压，则 Helmholtz 方程在直角坐标系 (x,y,z) 中的形式为

$$\nabla^2 p + k^2 p = 0, \tag{1}$$

其中，$\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$，$k(x,y,z) = \omega/c(x,y,z)$ 表示角频率为 ω 的声波的波数，$c(x,y,z)$ 为海水声速。

假设 (λ,ξ,η) 为某正交曲线坐标系，则其与直角坐标系 (x,y,z) 的坐标变换关系为

$$\begin{cases} \lambda = \lambda(x,y,z), \\ \xi = \xi(x,y,z), \\ \eta = \eta(x,y,z). \end{cases} \tag{2}$$

由此可知，

$$\begin{cases} p_x = p_\lambda \lambda_x + p_\xi \xi_x + p_\eta \eta_x, \\ p_y = p_\lambda \lambda_y + p_\xi \xi_y + p_\eta \eta_y, \\ p_z = p_\lambda \lambda_z + p_\xi \xi_z + p_\eta \eta_z. \end{cases} \tag{3}$$

进一步地，

$$\begin{cases} p_{xx} = p_{\lambda\lambda}(\lambda_x)^2 + p_{\xi\xi}(\xi_x)^2 + p_{\eta\eta}(\eta_x)^2 \\ \qquad + 2p_{\lambda\xi}\lambda_x\xi_x + 2p_{\lambda\eta}\lambda_x\eta_x + 2p_{\xi\eta}\xi_x\eta_x \\ \qquad + p_\lambda\lambda_{xx} + p_\xi\xi_{xx} + p_\eta\eta_{xx}, \\ p_{yy} = p_{\lambda\lambda}(\lambda_y)^2 + p_{\xi\xi}(\xi_y)^2 + p_{\eta\eta}(\eta_y)^2 \\ \qquad + 2p_{\lambda\xi}\lambda_y\xi_y + 2p_{\lambda\eta}\lambda_y\eta_y + 2p_{\xi\eta}\xi_y\eta_y \\ \qquad + p_\lambda\lambda_{yy} + p_\xi\xi_{yy} + p_\eta\eta_{yy}, \\ p_{zz} = p_{\lambda\lambda}(\lambda_z)^2 + p_{\xi\xi}(\xi_z)^2 + p_{\eta\eta}(\eta_z)^2 \\ \qquad + 2p_{\lambda\xi}\lambda_z\xi_z + 2p_{\lambda\eta}\lambda_z\eta_z + 2p_{\xi\eta}\xi_z\eta_z \\ \qquad + p_\lambda\lambda_{zz} + p_\xi\xi_{zz} + p_\eta\eta_{zz}. \end{cases} \tag{4}$$

坐标系 (λ,ξ,η) 满足正交性，即

$$\nabla\lambda\cdot\nabla\xi = \nabla\lambda\cdot\nabla\eta = \nabla\xi\cdot\nabla\eta = 0. \tag{5}$$

利用式 (1)、式 (4)、式 (5)，可得坐标系 (λ,ξ,η) 内 Helmholtz 方程的形式为

$$\begin{aligned} &|\nabla\lambda|^2 p_{\lambda\lambda} + |\nabla\xi|^2 p_{\xi\xi} + |\nabla\eta|^2 p_{\eta\eta} \\ &+ \nabla^2\lambda p_\lambda + \nabla^2\xi p_\xi + \nabla^2\eta p_\eta + k^2 p = 0, \end{aligned} \tag{6}$$

其中，$\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$，$\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$，$p$ 和 k 都是关于新坐标变量 (λ, ξ, η) 的函数。注意算子 ∇ 和 ∇^2 仍是关于变量 (x, y, z) 的。理论上，若知道坐标变换函数并且方程 (6) 中的所有系数都可以表达为关于 (λ, ξ, η) 的函数，则方程 (6) 可在新坐标系 (λ, ξ, η) 中完全确定。

利用声场计算中常用的柱坐标系对式 (6) 进行验证。若记柱坐标系为 (r, φ, z)，则有以下变换关系：

$$\begin{cases} r^2 = x^2 + y^2, \quad \tan\varphi = \dfrac{y}{x}, \\ z = z. \end{cases} \tag{7}$$

根据式 (6)，在新坐标系 (r, φ, z) 下的 Helmholtz 方程为

$$p_{rr} + \frac{1}{r^2}p_{\varphi\varphi} + p_{zz} + \frac{1}{r}p_r + k^2 p = 0, \tag{8}$$

此即为柱坐标系中的 Helmholtz 方程。在水文环境水平不变情况下，p 与 φ 无关，可得最常用的柱坐标系下二维空间中的简化方程：

$$p_{rr} + p_{zz} + \frac{1}{r}p_r + k^2 p = 0. \tag{9}$$

2 基于地形的正交曲线坐标系选取

为方便计，这里只考虑地形在 y 方向是一致的情况，并且声源选取 y 方向无限延伸的线源，在这种情况下声压 p 与 y 无关，方程 (6) 可简化为

$$|\nabla\lambda|^2 p_{\lambda\lambda} + |\nabla\eta|^2 p_{\eta\eta} + \nabla^2\lambda p_\lambda + \nabla^2\eta p_\eta + k^2 p = 0. \tag{10}$$

由于此时所有变量都与 y 无关，所以只需在二维空间 (x, z) 内讨论就可以了。设海底地形由连续可微函数 $z = h(x)$ 来描述，现在来寻求由其决定的新正交坐标系 (λ, η)。

首先，证明如下定理。

定理 二维空间 (x, z) 中对某不相交曲线族 $\{F(x, z, C) = 0\}$，若存在另一曲线族 $\{G(x, z, C) = 0\}$，存在某函数 $H(x, z)$，使得 $\nabla G = H(x, z)(\partial F/\partial z, -\partial F/\partial x)$，则曲线族 $\{F(x, z, C) = 0\}$ 和 $\{G(x, z, C) = 0\}$ 构成这二维空间某正交曲线坐标系的两组坐标曲线。特别地，若 $F(x, z, C) = g(z) + Cf(x)$，$f(x)$、$g(z)$ 均为可微函数，则

$$G(x, z, C) = \int \frac{g(z)}{g'(z)}\mathrm{d}z + \int \frac{f(x)}{f'(x)}\mathrm{d}x + C, \tag{11}$$

使得 $\{G(x, z, C) = 0\}$ 描述的曲线族与曲线族 $\{F(x, z, C) = 0\}$ 构成此二维空间的正交曲线坐标系的两组坐标曲线，$f'(x)$ 是函数 $f(x)$ 关于 x 的导数，$g'(z)$ 是函数 $g(z)$ 关于 z 的导数。

证明：若这两族曲线是正交的，则其中任何两条相交的曲线在交点处是垂直的，故在此意义下，这两组曲线是唯一的。因此，只需验证曲线族 $\{F(x, z, C) = 0\}$ 与曲线族 $\{G(x, z, C) = 0\}$ 相互正交便可。由于

$$\nabla G = H(x, z)\left(\frac{\partial F}{\partial z}, -\frac{\partial F}{\partial x}\right), \tag{12}$$

明显地有

$$\begin{aligned} &\nabla F(x, z) \cdot \nabla G(x, z) \\ &= H(x, z)\left(\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial z}\right) = 0. \end{aligned} \tag{13}$$

也即在每一点 (x, z)，两族曲线相互正交。

当 $F(x, z, C) = g(z) + Cf(x)$ 时，在任意 $(\tilde{x}, \tilde{z})$ 点

$$\begin{cases} \nabla F(\tilde{x}, \tilde{z}) = (Cf'(\tilde{x}), g'(\tilde{z})), \\ \nabla G(\tilde{x}, \tilde{z}) = \left(\dfrac{f(\tilde{x})}{f'(\tilde{x})}, \dfrac{g(\tilde{z})}{g'(\tilde{z})}\right). \end{cases} \tag{14}$$

由于此时还满足 $F(\tilde{x}, \tilde{z}, C) = 0$，也即在 $(\tilde{x}, \tilde{z})$ 点，若 $f(\tilde{x}) \neq 0$，则

$$C = -\frac{g(\tilde{z})}{f(\tilde{x})}, \tag{15}$$

从而，

$$\nabla F(\tilde{x}, \tilde{z}) \cdot \nabla G(\tilde{x}, \tilde{z}) = -g(\tilde{z}) + g(\tilde{z}) = 0. \tag{16}$$

若 $f(\tilde{x}) = 0$ 时，根据 $F(\tilde{x}, \tilde{z}, C) = 0$，有 $g(\tilde{z}) = 0$，则仍然有 $\nabla F(\tilde{x}, \tilde{z}) \cdot \nabla G(\tilde{x}, \tilde{z}) = 0$，从而在每一点 $(\tilde{x}, \tilde{z})$，两族曲线相互正交。定理证毕。

根据定理描述，要得到地形相关的正交曲线坐标系，只需找到直角坐标系下满足条件的曲线族。海底由函数 $z = f(x)$ 描述，考察满足如下条件的曲线族 $\{F(x, z, C) = z - Cf(x) = 0\}$，则 $C = 0$ 时，有 $z = 0$ 表示海面；$C = 1$ 时，有 $z = f(x)$ 表示海底。所以，当 C 在 $[0, 1]$ 内变化时得到的曲线族描述了整个水体，如图 1 所示。根据定理，与曲线族 $\{F(x, z, C) = 0\}$ 正交的另一族曲线族 $\{G(x, z, C) = 0\}$ 可以确定，

$$G(x, z, C) = \frac{z^2}{2} + \int \frac{f(x)}{f'(x)}\mathrm{d}x + C, \tag{17}$$

进而确定了所要寻求的正交曲线坐标系 (λ, η)。

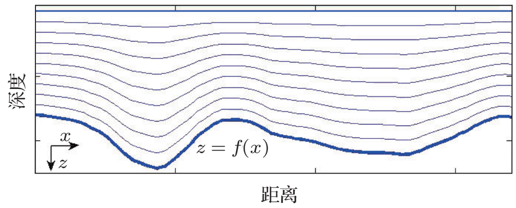


图 1　随水平变化的地形及与其适应的坐标系曲线

Fig. 1　A non-flat seafloor and its corresponding coordinate curves

据第 1 节的讨论，可以求出在新坐标系下 Helmholtz 方程的具体表示形式。存在实数域上单调可微函数 a、b，使得

$$\begin{cases}\nabla\lambda=a'(G)\nabla G=a'(G)\Big(\dfrac{f}{f'},z\Big),\\ \nabla\eta=b'(F)\nabla F=b'(F)\Big(-\dfrac{zf'}{f},1\Big).\end{cases}\tag{18}$$

进而

$$\begin{cases}|\nabla\lambda|^2=a'^2(G)\Big(\dfrac{f^2}{f'^2}+z^2\Big),\\ |\nabla\eta|^2=b'^2(F)\Big(\dfrac{z^2f'^2}{f^2}+1\Big),\\ \nabla^2\lambda=a''(G)\Big(\dfrac{f^2}{f'^2}+z^2\Big)+a'(G)\Big(2-\dfrac{ff''}{f'^2}\Big),\\ \nabla^2\eta=b''(F)\Big(\dfrac{z^2f'^2}{f^2}+1\Big)+b'(F)\Big(\dfrac{zf'^2}{f^2}-\dfrac{zf''}{f}\Big).\end{cases}\tag{19}$$

将式 (19) 代入式 (10) 可得到新的 Helmholtz 方程，注意此时方程的系数仍是关于 (x,z) 变量的，如果能将之化为关于 (λ,η) 变量的函数，则方程会简化并可进行求解。

进一步讨论之前，给出一个简单例子，如图 2 所示，考虑海底是斜坡的情况。设斜坡由函数 $z=-C_1x+C_2$ 描述 (C_1、C_2 为某实数)，则根据定理有

$$\begin{cases}F=z-C_1x+C_2,\\ G=\dfrac{1}{2}z^2+\displaystyle\int\dfrac{-C_1x+C_2}{-C_1}\mathrm{d}x\\ \quad=\dfrac{1}{2}z^2+\dfrac{1}{2}\Big(x-\dfrac{C_2}{C_1}\Big)^2.\end{cases}\tag{20}$$

其中，第二式中省略了一个常数。易知 $\{F(x,z,C)=0\}$ 描述的曲线族是从 P 点出发的射线，$\{G(x,z,C)=0\}$ 描述的曲线族是以 P 点为圆心的同心圆，如图 2 所示，很明显它们构成相互正交的两组曲线。若计 P 点横坐标为 $x_0=C_2/C_1$，则可设新坐标变量如下：

$$\begin{cases}\phi=\arctan(C_1F)=\arctan\Big(\dfrac{z}{x_0-x}\Big),\\ \rho=\sqrt{2G}=\sqrt{z^2+(x-x_0)^2}.\end{cases}\tag{21}$$

(ρ,ϕ) 是二维正交曲线坐标系，扩展到三维是一个标准的横向柱坐标系。众所周知，线源情况下斜坡海底有解析解时，就是要通过这种坐标系求解 [7−9]。利用本文方法很容易得到同样结果。根据式 (10) 可得此时 Helmholtz 方程为

$$p_{\rho\rho}+\frac{1}{\rho}p_\rho+\frac{1}{\rho^2}p_{\phi\phi}+k^2p=0.\tag{22}$$

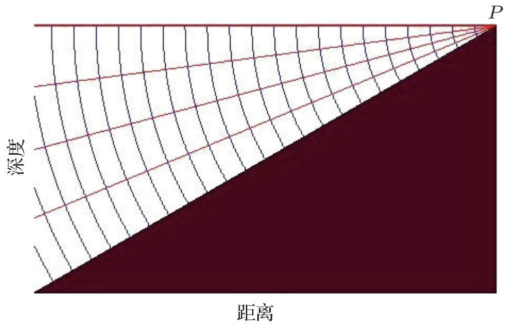


图 2　斜坡地形及其决定的双曲正交坐标系

Fig. 2　A wedge problem and suitable orthogonal curvilinear coordinates

3　横向柱坐标系中的线源问题

本节中，结合简正波方法与第 2 节得到的横向柱坐标系的 Helmholtz 方程对某些典型海底地形的声场计算问题进行研究说明。为讨论方便，所涉及的海底及海面边界条件均为理想边界条件。

简正波方法主要思想是利用分离变量法进行求解，假设方程 (22) 的分离变量解为

$$p(\rho,\phi)=\Lambda(\rho)\varPhi(\phi).\tag{23}$$

将式 (23) 代入方程 (22) 整理得

$$\frac{\rho^2}{\Lambda}\Big(\Lambda''+\frac{1}{\rho}\Lambda'+k^2\Lambda\Big)=-\frac{\varPhi''}{\varPhi}.\tag{24}$$

方程 (24) 两边各自与不同的自变量有关，从而应该为一常数，设为 τ，则方程 (24) 转化为如下两个常微分特征值问题：

$$\varPhi''+\tau\varPhi=0,\tag{25}$$

$$\Lambda''+\frac{1}{\rho}\Lambda'+\Big(k^2-\frac{\tau}{\rho^2}\Big)\Lambda=0.\tag{26}$$

将方程 (25) 两边乘以 Φ 后，关于 ϕ 在 $[0,\phi_0]$ 上积分整理可得

$$\Phi'\Phi|_0^{\phi_0}-\int_0^{\phi_0}|\Phi'|^2\mathrm{d}\phi+\tau\int_0^{\phi_0}|\Phi|^2\mathrm{d}\phi=0.\quad(27)$$

要求解方程 (27)，需要施加边界条件。假设边界在 $\phi=0$ 和 $\phi=\phi_0$ 处，分别考虑以下三种情况：(1)$\phi=0$ 处绝对软，$\phi=\phi_0$ 处绝对硬；(2)$\phi=0$ 和 $\phi=\phi_0$ 处都绝对软；(3)$\phi=0$ 和 $\phi=\phi_0$ 处都绝对硬。实际上，情况 (1) 和情况 (2) 的结果是经常讨论的[4,8−9]，情况 (3) 讨论较少。这样的 p 的边界条件对应到 Φ 上便为 (1)$\Phi(0)=0$，$\Phi'(\phi_0)=0$；(2)$\Phi(0)=0$，$\Phi(\phi_0)=0$；(3)$\Phi'(0)=0$，$\Phi'(\phi_0)=0$。不管哪一个条件，都会有 $\Phi\Phi'|_0^{\phi_0}=0$，从而等式 (27) 变为

$$\tau\int_0^{\phi_0}|\Phi|^2\mathrm{d}\phi-\int_0^{\phi_0}|\Phi'|^2\mathrm{d}\phi=0.\quad(28)$$

这说明 $\tau\geqslant 0$，不妨设 $\tau=\gamma^2$。这样特征值问题 (25) 具有离散谱，设特征值为 $\{\gamma_n^2\}$，则对应的特征函数为

$$\Phi_n(\phi)=A_n\sin(\gamma_n\phi)+B_n\cos(\gamma_n\phi),\quad(29)$$

其中，A_n、B_n 为待定常数，需根据边界条件确定。为保证归一条件 $\int_0^{\phi_0}|\Phi_n|^2\mathrm{d}\phi=1$，情况 (1) 的解为

$$A_n=\sqrt{\frac{2}{\phi_0}},\quad B_n=0,\quad \gamma_n=\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{\phi_0},\quad n=1,2,\cdots\quad(30)$$

情况 (2) 的解为

$$A_n=\sqrt{\frac{2}{\phi_0}},\quad B_n=0,\quad \gamma_n=\frac{n\pi}{\phi_0},\quad n=1,2,\cdots\quad(31)$$

情况 (3) 的解为

$$A_n=0,\quad B_n=\sqrt{\frac{2^{\min(1,n)}}{\phi_0}},\quad \gamma_n=\frac{n\pi}{\phi_0},\quad n=0,1,2,\cdots\quad(32)$$

注意到情况 (3) 中 n 可以取 0，这是非常重要的。这样得到 γ_n 后，可以将之代入式 (26) 求解。三种情况中 $\{\Phi_n\}$ 都可以构成满足相应边界条件的函数空间的完备正交基，也就是说

$$\int_0^{\phi_0}\Phi_n\Phi_m\mathrm{d}\phi=\delta_{mn},\quad(33)$$

并且对任何满足相应边界条件的函数都可以表示成 $\{\Phi_n\}$ 的线性组合。

现在把声源考虑进来，Helmholtz 方程变为

$$p_{\rho\rho}+\frac{1}{\rho}p_\rho+\frac{1}{\rho^2}p_{\phi\phi}+k^2p=-\frac{\delta(\rho-\rho_s)}{\rho}\delta(\phi-\phi_s).\quad(34)$$

声源在横向柱坐标系的 (ρ_s,ϕ_s) 位置处，根据特征值问题 (25) 的解，方程 (34) 的解可以写为如下形式：

$$p(\rho,\phi)=\sum_n\Lambda_n(\rho)\Phi_n(\phi).\quad(35)$$

将式 (35) 代入式 (34)，并在方程两边乘以 Φ_n 后，关于 ϕ 在 $[0,\phi_0]$ 上积分整理可得 $\Lambda_n(\rho)$ 满足

$$\Lambda_n''+\frac{1}{\rho}\Lambda_n'+\left(k^2-\frac{\gamma_n^2}{\rho^2}\right)\Lambda=-\frac{\delta(\rho-\rho_s)\Phi_n(\phi_s)}{\rho}.\quad(36)$$

这是一个典型的 Bessel 方程，其解为

$$\Lambda_n(\rho)=\frac{\pi}{2}\mathrm{i}J_{\gamma_n}(k\rho_<)H_{\gamma_n}^{(1)}(k\rho_>)\Phi_n(\phi_s),\quad(37)$$

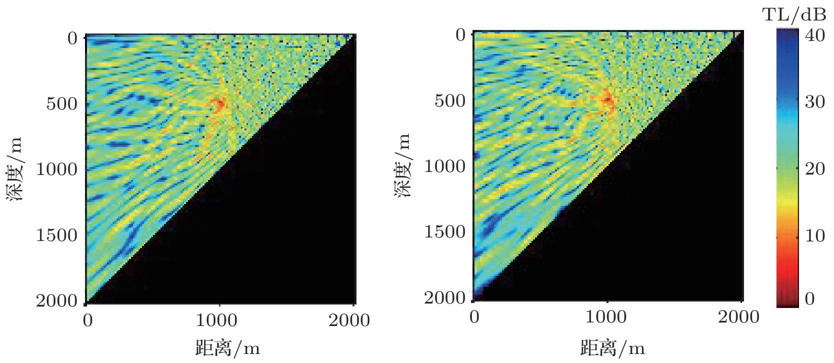
其中，$\rho_<=\min(\rho,\rho_s)$，$\rho_>=\max(\rho,\rho_s)$。这样方程 (34) 的解为

$$p(\rho,\phi)=\frac{\pi\mathrm{i}}{2}\sum_n\Phi_n(\phi)\Phi_n(\phi_s)J_{\gamma_n}(k\rho_<)H_{\gamma_n}^{(1)}(k\rho_>).\quad(38)$$

基于以上结果，给出四种典型海底情况的应用。以下所有实例中，都是考虑等声速情况，参考声速为 1500 m/s，并且只考虑提到的边界，其他边界不予考虑，也就是说，实例中的空间是无限延伸的。

3.1 斜坡情况

第一个应用实例为经典的斜坡情况，如图 3 所示，斜坡角度为 π/4，声源位于斜坡上方坐标 (1000, 500) 处，声源频率为 25 Hz，根据坐标系选取方法，要取原点位于坐标 (2000, 0) 的柱坐标系进行声场计算。图 3(a) 为海底满足绝对硬条件下的传播损失情况；图 3(b) 为海底满足绝对软条件下的传播损失情况。



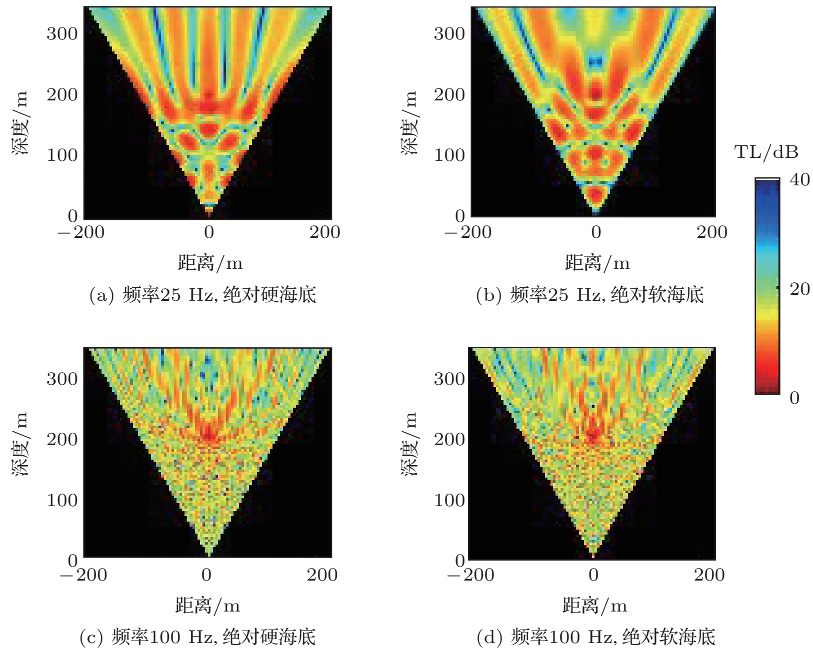
(a) 绝对硬海底　　(b) 绝对软海底

图 3　绝对软海面条件下斜坡问题的声传播损失

Fig. 3　Transmission loss for wedge problem with pressure-release surface

3.2　海沟情况

假设声源频率分别为 25 Hz 和 100 Hz，在 V 型海沟顶点正上方 200 m 处，若海沟开角弧度为 π/3，此时也可以利用上面所说的横向柱坐标系来求解。设柱坐标原点在海沟顶点处，$\phi_0 = \pi/3$，$\rho_s = 200$，$\phi_s = \pi/6$，分别取海沟的海底边界条件为绝对软和绝对硬，计算区域 $[0, 600] \times [0, \pi/3]$ 内的声场，如图 4 所示，图 4(a)、图 4(b) 分别为 25 Hz 声源取绝对硬和绝对软边界时的声场，图 4(c)、图 4(d) 分别为 100 Hz 声源取绝对硬和绝对软边界时的传播损失情况。实际上，可以计算声源位于海沟中任意位置的情况。



(a) 频率25 Hz, 绝对硬海底　　(b) 频率25 Hz, 绝对软海底

(c) 频率100 Hz, 绝对硬海底　　(d) 频率100 Hz, 绝对软海底

图 4　海沟问题的声传播损失

Fig. 4　Transmission loss for trench problem

3.3　海底山情况

在不考虑其他边界 (海面) 影响的情况下，本文方法可以解决任意坡度的海底山问题。设海底山两边夹角弧度为 π/3，声源频率为 100 Hz，分别计算声源在海底山顶点正上方和斜下方的传播损失，此时要以海底山顶点作为原点建立坐标系。如图 5 所示，图 5(a)、图 5(b) 为声源在海底山顶点正上方的情况，海底山边界分别取绝对硬和绝对软；图 5(c)、图 5(d) 为声源在海底山顶点斜下方的情况，声源与海底山顶点连线与海底山左侧边界夹角为 π/6，海底山边界也分别取绝对硬和绝对软。海底山两边可以是不对称的。

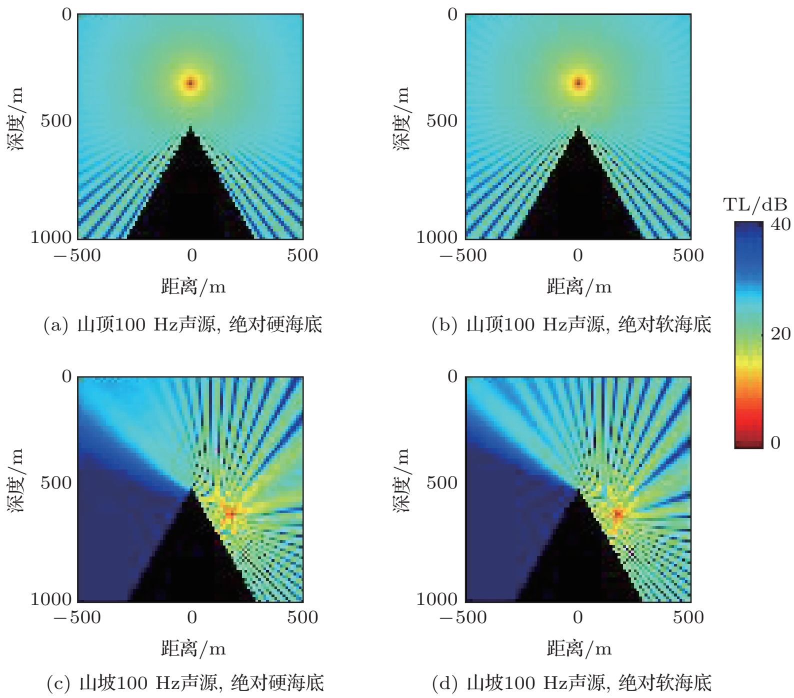


图 5　海底山问题的声传播损失

Fig. 5 Transmission loss for seamount problem

3.4 半空间情况

对于线源，平坦海底时的半空间声场可以由格林函数得到，本文方法也能处理这种情况，因此，本例可以作为本文方法正确性的验证。假设海底深度为600 m，声源频率为50 Hz，声源深度为300 m，设海面满足绝对软条件，海底满足绝对硬条件。如图6所示，图6(a) 只考虑海面的影响，此时设柱坐标原点位于海面上 $(0,0)$ 点，取 $\phi_0=\pi$，$\rho_s=300$，$\phi_s=\pi/2$；

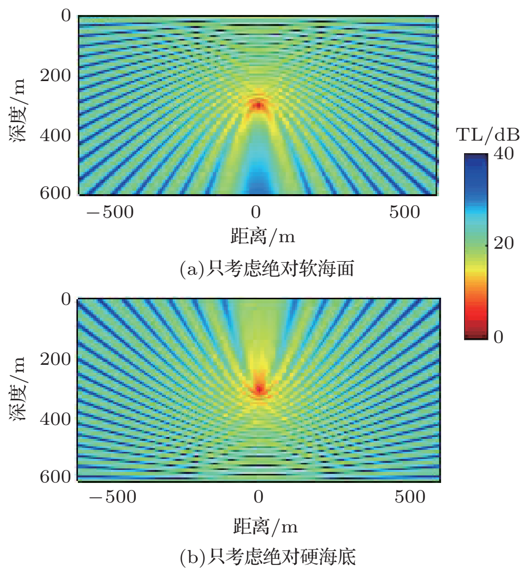


图 6　半空间问题的声传播损失

Fig. 6 Transmission loss for half-space problem

图 6(b) 只考虑海底的影响，此时设柱坐标原点位于海面上 $(0,600)$ 点，取 $\phi_0=\pi$，$\rho_s=300$，$\phi_s=\pi/2$。这两种情况的解析解都可以由格林函数构造出来，经过验证，两种方法得到的结果一致。

4 横向椭圆柱坐标系中的线源问题

假设海底是某双曲线型海底山，如图7所示，双曲线焦距为 γ_0，山顶深度为 H，则海底山由以下函数描述：

$$\frac{z^2}{H^2}-\frac{x^2}{\gamma_0^2-H^2}=1,\quad (z>0). \tag{39}$$

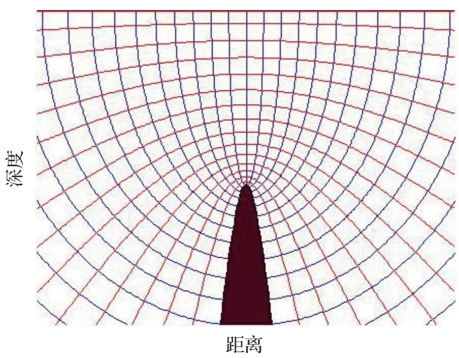


图 7　双曲型海底及对应正交曲线坐标系

Fig. 7 Hyperbolic type sea floor and suitable orthogonal curvilinear coordinates

若假设

$$F(x,z,C) = \begin{cases} \dfrac{z^2}{C^2} - \dfrac{x^2}{\gamma_0^2 - C^2} - 1, & C>0, z>0, \\ z, & C=0, z=0, \end{cases} \tag{40}$$

则由当 $C=0$ 时，$z=0$ 表示海面；当 $C=H$ 时，$F(x,z,C)=0$ 表示海底。因此具有相同焦点的双曲线族 $\{F(x,z,C)=0|C\in[0,H]\}$ 可作为正交曲线坐标系的一组坐标曲线。现在根据本文理论寻求另一组坐标曲线。

在 $C^2>0$ 时，在计算区域的任一点 (x,z)，有

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{2x}{\gamma_0^2 - C^2},\quad \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{2z}{C^2}. \tag{41}$$

则根据上面的讨论，不妨假设另一族曲线 $\{G(x,z,C)=0\}$ 满足

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{2z}{C^2},\quad \frac{\partial G}{\partial z} = \frac{2x}{\gamma_0^2 - C^2}. \tag{42}$$

由于在 (x,z) 点还有 $F(x,z,C)=0$，利用关系 $C\leqslant H<\gamma_0$，可求得

$$C^2 = \frac{x^2+z^2+\gamma_0^2 - \sqrt{(x^2+z^2+\gamma_0^2)^2 - 4\gamma_0^2 z^2}}{2}. \tag{43}$$

将式 (43) 代入式 (42)，整理得

$$\nabla G = \frac{\left(x^2+z^2+\sqrt{(x^2+z^2+\gamma_0^2)^2-4\gamma_0^2 z^2}\right)^2-\gamma_0^4}{8xz\gamma_0^2} \times \left(\frac{2x}{\tilde{C}^2-\gamma_0^2}, \frac{2z}{\tilde{C}^2}\right), \tag{44}$$

其中，

$$\tilde{C}^2 = \frac{x^2+z^2+\gamma_0^2 + \sqrt{(x^2+z^2+\gamma_0^2)^2 - 4\gamma_0^2 z^2}}{2}. \tag{45}$$

根据式 (43) 和式 (45)，C^2 和 $\tilde{C}^2$ 为同一个一元二次方程的两个解，并且 $\{G(x,z,\tilde{C})=0\}$ 为具有相同焦点的椭圆曲线族，由于满足式 (44) 括号中描述的梯度表达式，易知

$$G(x,z,\tilde{C}) = \frac{z^2}{\tilde{C}^2-\gamma_0^2} + \frac{x^2}{\tilde{C}^2} - 1. \tag{46}$$

如图 7 所示，蓝线为椭圆曲线族，红线为双曲曲线族，两者的焦点重合，确实构成了一个正交曲线坐标系：椭圆柱坐标系。

下面结合分离变量法，讨论椭圆柱坐标系中的 Helmholtz 方程求解问题 [5]。假设椭圆柱坐标系为 (γ,φ)，则其与直角坐标系 (x,z) 的坐标变换关系为

$$\begin{cases} x=\gamma_0\sinh\gamma\sin\varphi, \\ z=\gamma_0\cosh\gamma\cos\varphi, \end{cases}$$

$$0\leqslant\gamma\leqslant\infty,\ 0\leqslant\varphi\leqslant\varphi_0,\ \pi-\varphi_0\leqslant\varphi\leqslant\pi. \tag{47}$$

当 $\varphi=\varphi_0$ 及 $\varphi=\pi-\varphi_0$ 时，对应海底地形。进而，根据式 (6)，Helmholtz 方程在该椭圆柱坐标系中的表达式为

$$\frac{1}{\gamma_0^2(\sinh^2\gamma+\sin^2\varphi)}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial\gamma^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial\varphi^2}\right)+k^2 p=0. \tag{48}$$

即

$$\frac{\partial^2 p}{\partial\gamma^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial\varphi^2}+\frac{\gamma_0^2 k^2}{2}\left(\cosh 2\gamma-\cos 2\varphi\right)p=0. \tag{49}$$

利用分离变量法，设 $p=\Gamma(\gamma)\varPhi(\varphi)$，则有

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2\Gamma}{\mathrm{d}\gamma^2}-(c-2q\cosh 2\gamma)\Gamma=0, \\ \dfrac{\mathrm{d}^2\varPhi}{\mathrm{d}\varphi^2}+(c-2q\cos 2\varphi)\varPhi=0, \end{cases} \tag{50}$$

其中，$q=\gamma_0^2 k^2/4$，c 为待定常数。式 (50) 中两个方程分别为修正 Mathieu 方程和 Mathieu 方程，根据相关求解理论 [5,10]，其解分为两类，偶型解和奇型解。偶型解为

$$\begin{cases} \Gamma(\gamma)=A\mathrm{ce}(\mathrm{i}\gamma,c)+B\mathrm{fe}(\mathrm{i}\gamma,c), \\ \varPhi(\varphi)=A\mathrm{ce}(\varphi,c)+B\mathrm{fe}(\varphi,c), \end{cases} \tag{51}$$

奇型解为

$$\begin{cases} \Gamma(\gamma)=A\mathrm{se}(\mathrm{i}\gamma,c)+B\mathrm{ge}(\mathrm{i}\gamma,c), \\ \varPhi(\varphi)=A\mathrm{se}(\varphi,c)+B\mathrm{ge}(\varphi,c), \end{cases} \tag{52}$$

其中，$\mathrm{ce}(\varphi,c)$ 和 $\mathrm{se}(\varphi,c)$ 为第一型 Mathieu 函数，是周期部分；$\mathrm{fe}(\varphi,c)$ 和 $\mathrm{ge}(\varphi,c)$ 为非周期部分。在波动理论，要求解具有周期性，因此需要式 (51)、式 (52) 中 $B=0$。

假设 Helmholtz 方程在海底满足绝对硬，海面满足绝对软条件，也即

$$\begin{cases} \varPhi'(\varphi)=0, & \varphi=\varphi_0, \varphi=\pi-\varphi_0, \\ \varPhi(\varphi)=0, & \varphi=0, \varphi=\pi. \end{cases} \tag{53}$$

根据式 (51) ∼ (53)，可得到一系列 $\{c_n\}$，使得

$$p(\gamma,\varphi)=\sum_n C_n \mathrm{se}(\varphi,c_n)\mathrm{se}(\mathrm{i}\gamma,c_n), \tag{54}$$

其中，C_n 可由 Mathieu 函数和声源条件得到。式 (54) 的具体求解需依赖于 Mathieu 函数理论的进一步发展。利用横向椭圆柱坐标系，经过理论上推导，可以得到双曲型海底山的线源声场分布。

5 结论

本文从正交曲线坐标系的角度提出了声场计算的一些新观点和新应用。通过坐标系变换，推导了任意正交曲线坐标系内的 Helmholtz 方程表达式，并基于此研究了与海底地形相适应的正交曲线坐标系的选取规则，然后对横向柱坐标系和椭圆柱坐标系进行了深入研究，进一步结合简正波理论对多种典型地形情况下声场计算问题进行了讨论。结果表明，本文的方法在变化地形的声场计算问题中有良好的应用前景，能够弥补传统方法的一些不足。本文的方法从新角度来处理声场计算问题，得到了一些新结论，但在这个新领域仍是初步探索阶段，还有众多问题值得分析和研究。

致谢 感谢本文作者所参与应用项目和本实验室对本文研究的大力支持，本文方法和研究结果得到了实际应用；感谢李启虎院士对我们青年水声工作者一直以来的谆谆教导与无微关怀。

谨在李启虎院士八十诞辰之际，祝老先生生日快乐、健康长寿！

参 考 文 献

[1] Higdon R L. Numerical modeling of ocean circulation[J]. Acta Numerica, 2006, 15: 385–470.

[2] Lan H Q, Zhang Z J. Comparative study of the free-surface boundary condition in two-dimensional finite-difference elastic wave field simulation[J]. Journal of Geophysics and Engineering, 2011, 8(2): 275–286.

[3] Lan H Q, Zhang Z J. Three-dimensional wave-field simulation in heterogeneous transversely isotropic medium with irregular free surface[J]. Bulletin of the Seismological Society of America, 2011, 101(3): 1354–1370.

[4] Jensen F B, Kuperman W A, Porter M B, et al. Computational ocean acoustics[M]. Berlin: Springer, 2011: 337–456.

[5] Willatzen M, Voon L C L Y. Separable boundary-value problems in physics[M]. Morten Willatzen and Lok C. Lew Yan Voon Wiley-VCH, 2011: 39–78.

[6] Morse P M, Feshbach H. Methods of theoretical physics: part II [M]. New York: McGraw-Hill, 1953.

[7] Buckingham M J, Tolstoy A. An analytical solution for benchmark problem 1: the 'ideal' wedge[J]. Journal of the Acoustical Society of America, 1990, 87(4): 1511–1511.

[8] Luo W Y, Yang C M, Qin J X, et al. Sound propagation in a wedge with a rigid bottom[J]. Chinese Physics Letters, 2012, 29(10): 104303.

[9] Luo W Y, Yang C M, Qin J X, et al. Benchmark solutions for sound propagation in an ideal wedge[J]. Chinese Physics B, 2013, 22(5): 054301.

[10] 王竹溪, 郭敦仁. 特殊函数概论 [M]. 北京: 北京大学出版社, 2000: 337–635.