小阻尼界面房间声传输函数和声脉冲响应函数的有限元素法 *

赵越喆　　　　吴硕贤

(浙江大学建筑系　杭州 310027)　(华南理工大学建筑学系　广州 510641)

1998 年 10 月 5 日收到

摘要　有限元素法 (FEM) 可用于以声波动方程为基础通过数值计算求解室内声场，适用于分析界面阻抗非均匀分布和复杂形状房间内声场的低频特性。本文首先介绍了小阻尼界面条件下室内声场简正方式、声衰变系数、混响时间的 FEM 计算方法。在此基础上导出了房间内两点之间声传输函数和声脉冲响应函数的 FEM 计算模型，并以矩形房间为例详细讨论了有关细节。本文所讨论的计算模型可以反映房间内不同的声源点、接收点位置上的声压频谱特性和脉冲响应的时间结构，如直达声、反射声等。该方法可用于研究声波在室内的传播规律及预测房间的低频声学特性，在厅堂音质设计、音质评价和噪声控制的实践中具有广泛的应用前景，是虚拟现实可听化研究的基础。

关键词　有限元素法 (FEM)，小阻尼界面房间，声传输函数，声脉冲响应

A finite element method for calculating the acoustic transmission function and the acoustic impulse response in a lightly damped room

Zhao Yuezhe　　Wu Shuoxian**

(Dept. of Architecture, Zhejiang University,　Hangzhou 310027)

***(Dept. of Architecture, South China Univ. of Technology,　Guangzhou 510641)*

Abstract　Finite Element Method is a useful tool in the analysis of low-frequency room acoustic phenomenon where the true wave nature of sound must be accurately modeled. The acoustic finite element equation for lightly damped rooms which was developed by A.Craggs[1,2] is listed in the first part of this paper .In the later part FEM is extended to calculate acoustic transmission function between two points, and also the acoustic impulse response. It is shown that the computer model successfully predicts the effects of the different source-receiver locations on amplitude-frequency spectrum. Also the model solution method does capture the effects of direct sound and the reflections. As an example, a full three-dimensional rectangular room has been modeled with details.

* 广东省自然科学基金资助项目

Key words Finite element method, Lightly damped rooms, Acoustic transmission function, Acoustic impulse response

1 引言

目前国内外用于描述室内声传播的数值方法主要有声线跟踪法和虚声源法。两者均属于室内几何声学的范畴，忽略声波的干涉和衍射现象，所以这两种方法只能用于研究声场的高频特性，其基本假设是声线以直线形式传播。在声频的低频段，声波波长与室内反射物体的尺寸处于同一数量级，波动现象已不容忽略，这时必须从波动声学的角度分析室内声场问题。

有限元素法 (FEM) 是基于声波动方程求解室内声场的数值计算方法，对于分析界面阻抗非均匀分布和复杂形状房间内声场的低频特性具有显著的优点，可以真实地模拟声场的波动特征。自 1965 年第一篇文章发表至今 [3]，有限元素法在声学中的应用已有很大的发展。60–70 年代，有限元素法被用来解决车辆的降噪问题 [4]。 80 年代以来，国内外对于声场的 FEM 进行了较深入的研究，并在声学的各个领域广泛应用，但研究内容局限于小室内声场的低频特性 [5,6]。近年来，随着高速、大容量计算机的问世，使得应用有限元素法研究建筑室内声学问题成为可能。1994 年， A.Craggs[1,2] 探讨了小阻尼界面条件下室内声 FEM 计算模型的简化，并给出了固有频率、声衰变系数、混响时间等声场参量的 FEM 计算方法。但其并未将该方法应用于计算房间内两点之间的传输函数和声脉冲响应。虽然 V.Easwaran[7] 在 A.Craggs 工作的基础上讨论过瞬态响应的计算模型，但该模型还有待于进一步完善。

建筑室内空间的声传输函数和声脉冲响应分别在频率域和时间域反映了房间的声学特性。室内声传输函数可用于研究声场频率特性的均匀性。在房间的声学设计过程中，合理地布置声源点和接受点的位置，可以有效地抑制或利用某些频率。通过对脉冲响应时间结构的研究，可以发现房间某个特定的位置上是否存在某些严重的声缺陷，如缺乏初始反射声，或者强反射之间的时间间隔太长以及回声等。了解了声脉冲响应，许多重要的声场评价参量便可从中求出。此外，脉冲响应还是虚拟现实可听化研究的基础。

本文在 A.Craggs 工作的基础上，给出了计算房间内两点之间声传输函数和声脉冲响应的 FEM 计算模型。虽然文中只给出了矩形房间的算例，但所描述的算法同样可应用于其它非规则形状房间。

2 小阻尼界面条件下室内声场 FEM 计算模型

在体积为 V，表面积为 S 的封闭空间中，假定声压、质点速度等量具有相同的角频率并遵循简谐时间规律。室内声波方程为

$$\nabla^2 p-(1/c_0)^2\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}=0 \tag{1}$$

式中 p 为声压， c_0 为声速。设边界表面 S 的外法线方向为 n，空气密度为 ρ_0，界面声阻抗为 Z_s，则边界条件表述为

$$\frac{\partial p}{\partial n}=-\frac{\rho_0}{Z_s}\dot{p}=-j\rho_0\omega\frac{p}{Z_s} \tag{2}$$

满足边界条件 (2) 的方程 (1)，其解的有限元平衡方程为

$$[A]\{\ddot{p}\}+[B]\{\dot{p}\}+[C]\{p\}=0 \tag{3}$$

其中 $\{p\}$ 为节点声压向量，$[A]$、$[B]$、$[C]$ 分别为声质量矩阵、声阻尼矩阵和声刚度矩阵。由于计算中只考虑边界上的能量损耗，所以只有边界上的节点才对 $[B]$ 有贡献。令方程 (3) 的解为

$$\{p\}=\{p(t)\}e^{j\lambda t}=\{\psi\}e^{(-m+j\lambda)t} \tag{4}$$

将 (4) 式代入 (3) 式，在小阻尼界面，即 $(|Z_s|/\rho_0 c) >> 1$ 的条件下，A.Craggs [1] 假设声压向量 $\{\psi\}$ 为实数，这样方程 (3) 可以分解为两个方程，一个与房间的简正频率 λ 有关，

$$[C - \frac{1}{4}BA^{-1}B]\{\psi\} = \lambda^2[A]\{\psi\} \tag{5}$$

另一个与衰变系数 m 有关，

$$[B]^*\{\psi\} = 2m[A]\{\psi\} \tag{6}$$

其中

$$[B]^* = [X]^{-T}[b][X]^{-1} \tag{7}$$

$$[b] = [X]^T[B][X] \tag{8}$$

$[X]$ 为系统的正则振型矩阵，由 (5) 式中的特征向量 $\{\psi\}$ 组成，而 $[b]$ 为对角化的模态阻尼矩阵，由 (8) 式右端的对角元素组成。由 (6) 式，有

$$m_i = \frac{1}{2}\{\psi\}_i^T[B]^*\{\psi\}_i \tag{9}$$

方程 (5) 和 (9) 是 A.Craggs 的两个重要的推导结果，可分别用于计算室内声的简正方式和相应于各简正方式的声衰变系数 m_i 及混响时间 T_i，

$$T_i = \ln(1000)/m_i \tag{10}$$

3 小阻尼界面房间内声传输函数的 FEM 计算模型

在频率为 ω 的点声源激励下室内声波方程为

$$\nabla^2 P - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -j\rho_0\omega Q_0\delta(x-x_0) \cdot \delta(y-y_0)\delta(z-z_0)e^{j\omega t} \tag{11}$$

式中 (x_0, y_0, z_0) 为声源位置坐标，Q_0 为声源容积速度。在点声源激励下，房间内稳态声场的 FEM 计算模型可写为

$$[A]\{\ddot{p}\} + [B]\{\dot{p}\} + [C]\{p\} = j\rho_0\omega Q_0\{I_0\} \tag{12}$$

其中

$$\{I_0\} = \{0\cdots010\cdots0\}^T \tag{13}$$

$\{I_0\}$ 中除了声源所在节点所对应的元素为 1 外，其余均为 0 。(5) 式相当于下面的运动微分方程的特征值问题，

$$[M]\{\ddot{\psi}\} + [K]\{\psi\} = 0 \tag{14}$$

其中

$$\begin{aligned}[M] &= [A] \\ [K] &= [C - \frac{1}{4}BA^{-1}B]\end{aligned} \tag{15}$$

若 $[X]$ 为系统的正则振型矩阵，有

$$[X]^T[A][X] = [I] \tag{16}$$

$$[X]^T[C - \frac{1}{4}BA^{-1}B][X] = \Lambda^2 \tag{17}$$

所以

$$\begin{aligned}[X]^T[C][X] &= \Lambda^2 + \frac{1}{4}[X]^T[B][A]^{-1}[B][X] \\ &= \Lambda^2 + \frac{1}{4}([X]^T[B][X])([X]^T \\ &\quad \cdot [A][X])^{-1}([X]^T[B][X]) \\ &= \Lambda^2 + \frac{1}{4}[b]^2\end{aligned} \tag{18}$$

其中，Λ^2 为对角矩阵，对角元素为各阶固有频率的平方。对 (12) 式做正则坐标变换，令

$$\{P(t)\} = [X]\{N(t)\} \tag{19}$$

将 (19) 式代入 (12) 式，并用 $[X]^T$ 左乘方程的两边，得到 n 个解耦的方程

$$\ddot{N}_r(t) + b_r\dot{N}_r(t) + (\lambda_r^2 + \frac{1}{4}b_r^2)N_r(t) = j\rho_0\omega Q_0[X_r]^T\{I_0\} \quad (r = 1, 2, \cdots, n) \tag{20}$$

其中 $[X_r]$ 为相应于第 r 阶固有频率 λ_r 的振型，b_r 为对角化的模态阻尼矩阵 $[b]$ 中的第 r 个对

角元素。求解这 n 个独立的微分方程，得到正则坐标的稳态响应为

$$N_r(t)=j\rho_0\omega Q_0\frac{[X_r]^T\{I_0\}}{\omega_r^2}\frac{1}{(1-r_r^2)+j(2\xi_r r_r)} \quad (r=1,2,\cdots,n) \tag{21}$$

式中

$$\omega_r=(\lambda_r^2+b_r^2/4)^{1/2} \qquad r_r=\omega/\omega_r \quad \text{and} \quad \xi_r=b_r/(2\omega_r) \tag{22}$$

将 (21) 式代入 (19) 式，原广义坐标的稳态响应为

$$p(x,y,z|x_0,y_0,z_0)=j\rho_0\omega Q_0\sum_r\frac{[X_r][X_r]^T\{I_0\}}{\omega_r^2}\frac{1}{(1-r_r^2)+j(2\xi_r r_r)} \tag{23}$$

当房间不用简谐信号激发，而是用由一些谱分量组成的信号激发时，在上面的计算过程中，取 Q_0 为声源的谱函数 $Q(\omega)$ 。现假设声源函数是阶梯函数，即在 $t=0$ 以前，声源处于静止状态，而在 $t=0$ 以后，每秒发出 Q_0 体积的空气，则 $Q(\omega)=Q_0/j\omega$ ，代入 (23) 式，并将结果表示为模和幅角的形式

$$p(x,y,z|x_0,y_0,z_0)=\rho_0 Q_0\sum_r\frac{[X_r][X_r]^T\{I_0\}}{\omega_r^2}\frac{e^{-j\theta}}{[(1-r_r^2)^2+(2\xi_r r_r)^2]^{1/2}} \tag{24}$$

其中

$$\mathrm{tg}\theta=2\xi_r r_r/(1-r_r^2) \tag{25}$$

(23) 式即为小阻尼界面条件下，房间内两点之间声传输函数的 FEM 计算模型。其物理意义相应于动力学中的复频率响应函数，在频率域描述房间的声学特性。在以下的计算中，取 $Q_0=1$ 。

图 1 所示的矩形空间的尺寸为 L_x=6.0m ，L_y=4.0m ，L_z=5.0m 。$y=0$ 的一面墙的阻抗为 $Z_s=37\rho_0 c$ ，其它墙为刚性表面。该空间被离散为 960 个空间六面体等参数单元，共有 1287 个节点。房间内 A(2.0,1.0,1.5) 、 B(4.0,2.5,1.5) 和 A(2.0,1.0,1.5) 、 C(3.0,2.0,1.5) 两点之间的传输函数分别如图 2(a) 、 (b) 所示。在图中只表示了前 10 个振型. 表 1 中列出了这些振型的简正频率、衰变系数、混响时间. 将声源点和接收点的位置互换后，相应的声传输函数的图形不变。这符合房间内两点之间的声传输函数关于声源点和接受点对称，具有互易性的性质。从图中可以明显地看到简正波的共振特性。当声源的频率与某阶简正波的频率相等时，该阶简正波声压级有极大值。这时，声场主要由该阶简正波及其邻近阶简正波形成。但它们的强度不同，并且相互之间有相位差。

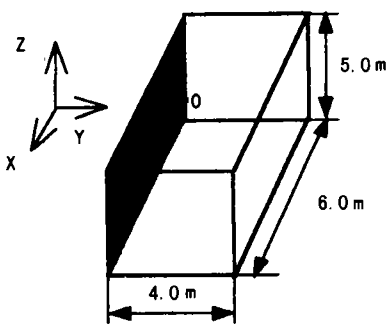

图 1　矩形空间

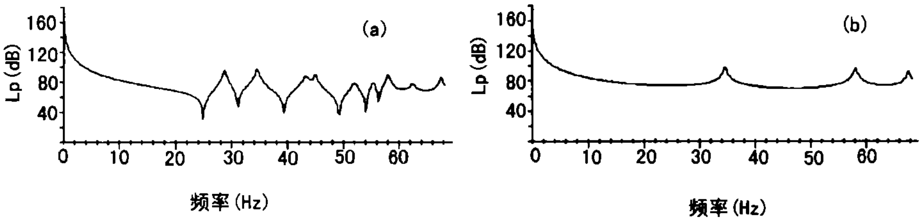

图 2　房间内两点之间的传输函数

(a) 声源位置 A(2.0,1.0,1.5)　接收点位置 B(4.0,2.5,1.5)

(b) 声源位置 A(2.0,1.0,1.5)　接受点位置 C(3.0,2.0,1.5)

表 1　图 1 所示矩形房间的声场参量

振型 nx,ny,nz	频率 Hz	衰变系数 s^{-1}	混响时间 s	振型 nx,ny,nz	频率 Hz	衰变系数 s^{-1}	混响时间 s
0,0,0	0	1.17	5.91	1,1,0	52	2.39	5.91
1,0,0	29	1.17	5.91	0,1,1	55	2.39	2.89
0,0,1	35	1.17	5.91	2,0,0	58	1.17	5.91
0,1,0	43	2.39	2.89	1,1,1	63	2.39	2.89
1,0,1	45	1.17	5.91	2,0,1	68	1.17	2.89

房间尺寸 6m×4m×5m　$Z_s(y=0)=37\rho_0 c$

对比图 2(a)、(b)，可以明显地看出，B 点的声场比 C 点的声场更均匀．图中所示 C 点的共振峰数目仅为 4，远远小于 10．这是由于 C 点位于房间的 x 轴和 y 轴的中平面上．所有 nx，ny 为奇数的振型在该点的声压为零．即该点位于第 2，4，5，6，7，9 个振型的波节平面上，所以该点的响应仅由第 1，3，8，10 个振型叠加而成．反之，当 C 点是声源点时，同样无法激起前面指出的六个振型，这时房间内任一点的响应都没有这些振型的贡献．在房间的声学设计过程中，根据声压频谱特性，合理地布置声源点和接受点的位置，可以有效地抑制或利用某些频率，特别是在低频段．

4　小阻尼界面房间内声脉冲响应的 FEM 计算模型

假设房间在 $t=0$ 时受到脉冲声激励，声有限元计算模型可写为

$$[A]\{\ddot{p}\}+[B]\{\dot{p}\}+[C]\{p\}=$$

$$\rho_0 Q_0\{I_0\}\delta(t) \tag{26}$$

作正则坐标变换，将 (19) 式代入 (26) 式并用 $[X]^T$ 左乘方程的两边，由 (8)、(16) 和 (18) 式，可以得到 n 个解耦的方程

$$\begin{aligned}\ddot{N}_r(t)+b_r\dot{N}_r(t)+(\lambda_r^2+\frac{1}{4}b_r^2)N_r(t)\\=\rho_0 Q_0[X_r]^T\{I_0\}\delta(t)\\(r=1,2,\cdots,n)\end{aligned} \tag{27}$$

根据动力学的知识，脉冲响应等价于在下列的初始条件下方程 (27) 所对应的齐次方程的解

$$\begin{aligned}N_r(0)&=0\\\dot{N}_r(0)&=\rho_0 Q_0[X_r]^T\{I_0\}\\&(r=1,2,\cdots,n)\end{aligned} \tag{28}$$

求解这 n 个独立的微分方程，得到正则坐标下的脉冲响应为

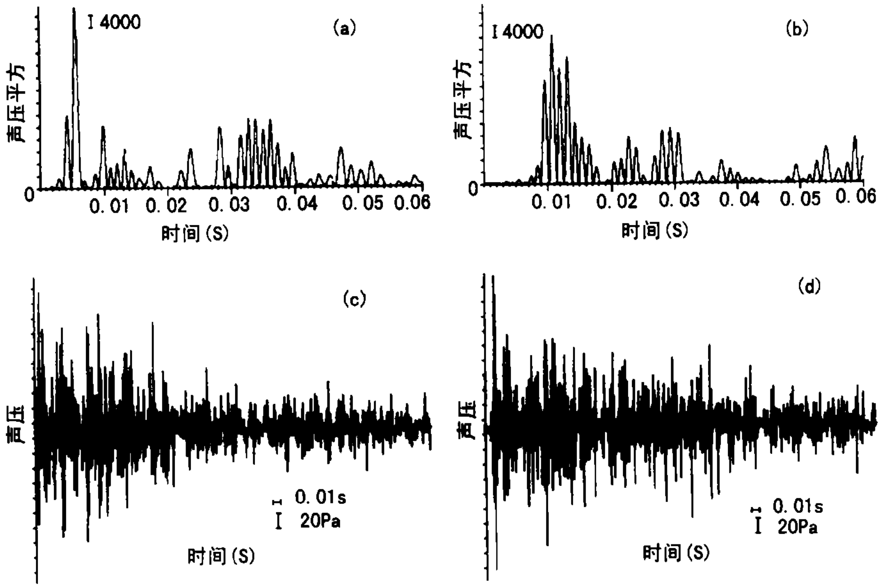

图 3 房间内不同位置的脉冲响应

声源位置: D(0.0,0.0,1.5) 接收点位置: (a),(c) A(2.0,1.0,1.5)
(b),(d) E(3.5,2.5,1.5)

$$N_r(t) = \frac{\rho_0 Q_0 [X_r]^T \{I_0\}}{\lambda_r} \times e^{(-b_r/2)t} \times \sin(\lambda_r t) \quad (29)$$

$$(r = 1, 2, \cdots, n)$$

将 (29) 式代入 (19) 式，得到原广义坐标的脉冲响应为

$$p(t) = \rho_0 Q_0 \sum_r \frac{[X_r][X_r]^T \{I_0\}}{\lambda_r} \times e^{(-b_r/2)t} \times \sin(\lambda_r t) \quad (30)$$

(30) 式即为小阻尼界面房间内声脉冲响应的 FEM 计算模型。它在时间域描述了房间的声学特性特性。(24) 式和 (30) 式互为傅立叶变换。

对于图 1 所示的矩形房间，当脉冲声源位于 D(0.0,0.0,1.5) 时，房间内 A 点 (2.0,1.0,1.5) 和 E 点 (3.5,2.5,1.5) 前 60ms 内的脉冲响应分别如图 3(a)、(b) 所示。图中的脉冲响应包括前 1000 个振型，最高频率为 486Hz。从图中可以明显的看到脉冲声的传播。第一个峰点相应于直达声，其后的各个峰点相应于渐次到达的反射声。A 点、E 点与声源的距离分别为 2.2m 和 4.3m，所以直达声应分别在 0.0065s，0.0125s 时到达 (假设声速为 344.8 m/s)。但是，图中所示的直达声到达的时间稍稍超前于这一时刻。甚至在直达声到达之前，已经有反射声存在。这主要是由于 FEM 得到的是真实值的上限解，使得精度较低的较高频率的声波以高于声速的速度传播。若要得到更精确的脉冲响应时间结构，可以在计算中去掉高阶振型。或者进一步细化网格，以提高高阶振型的计算精度。

图 3(c)、(d) 描述了 A 点和 E 点的脉冲响应在 500ms 内的衰减过程。根据脉冲响应，可以确定房间的混响时间 T_{60}，早期衰变时间 EDT，明晰度指数 C 和清晰度指数 D 等声场评价参量。该方法可用于建筑设计阶段，检验与直达声和反射声有关的房间形状，比较不同设计方案的优劣，避免在厅堂建好后，出现严重的声学缺陷。该方法也可用于研究室内的吸

声设计，如吸声面的位置、布置方式对室内声场的影响。另外，房间的脉冲响应时间结构的研究还是虚拟现实可听化研究的基础。

5 结论

基于声波动方程求解室内声场的 FEM 方法，可以真实地反映房间内声场的波动特征。FEM 可用于界面阻抗非均匀分布和复杂形状房间内声场的低频特性分析。房间的声传输函数和声脉冲响应函数是室内声学中两个最基本的声场参量，分别在频率域和时间域描述了房间的声学特性。本文所讨论的计算模型可以反映房间内不同的声源点、接收点位置上的声压频谱特性和脉冲响应的时间结构。在有限的自由度下，FEM 方法给出了大量的声学信息。本文所描述的算法可用于研究声波在室内的传播规律及预测房间的声学特性，在室内音质设计、音质评价和噪声控制的实践中具有广泛的应用前景。

参 考 文 献

1 Craggs A. *Journal of Sound and Vibration*, 1994, **170** (1): 130–139.

2 Craggs A. *Journal of Sound and Vibration*, 1994, **173** (4): 568–576.

3 Gladwell G M L. 5^e Congres International D'acoustique, Liege, 1965, L33.

4 Nefske N J, Wolf J A, Jr, et al. *Journal of Sound and Vibration*, 1982, **80**(2): 247–266.

5 Filippi P. CISM 277 Theoretical Acoustics and Numerical Techniques, New York: Springer-Verlag Wien, 1983.

6 刘树功. 声学学报, 1991, **17**(1): 17–21.

7 Easwaran V. *Journal of Acoustical Society of America*, 1996, **99**(1): 108–113.

(上接第 13 页)

5 结论

本文的分析结果表明，在噪声源的定位识别中，如果测量面离源面的距离选取不合适，直接利用测量数据来判断声源特性可能会得出错误的结论，如果采用声场空间变换技术 (NAH 或 BAHIM)，可以圆满地解决这一问题。实验结果也表明该技术是识别水下噪声源的一种有效方法，值得今后推广应用。

致谢 感谢商德江、谭福满、贾志富等同志对本文实验工作的帮助。

参 考 文 献

1 Maynard J D, Williams E G, Lee Y. *J.Acoust.Soc.Am.*, 1985,**178**: 1395–1413.

2 Veronesi W A, Maynard J D. *J.Acoust.Soc.Am.*, 1987, **181**: 1307–1322.

3 Zhang Dejun, Xia Xianhua, Yan Jing. 14th Inter-Congress on Acoustics, Beijing, 1992, B8-4.

4 Loyan T, Pascal J C, Gaillard P. *J.Acoust.Soc.Am.*, 1988, **184**: 1744–1750.

5 何元安, 何祚镛. 声学学报, 1996, **21**(4): 297–305.

6 Fahy F J. *J.Acoust.Soc.Am.*, 1977, **162**: 1057–1058.