

# 扬声器锥形振膜环反谐振频率的计算

张志良

(浙江师范大学物理系 金华 321004)

1999年9月13日收到

**摘要** 本文在求解扬声器锥形振膜低频振动的基础上,得到了计算扬声器锥壳环反谐振频率的精确公式,并借助特征频率反比于质量平方根的物理概念,推出了适于工程应用的近似公式,其偏差在3%以内。

**关键词** 扬声器锥壳,环反谐振频率,精确公式,近似公式

## Calculation of the antiresonance frequency of a loudspeaker cone ring

Zhang Zhiliang

(Department of physics, Zhejiang Normal University, Jinhua 321004)

**Abstract** An exact formula for the calculation of the ring antiresonance frequency of a loudspeaker cone is obtained, on the basis of solving the vibration of the loudspeaker cone in low frequency range. An approximate formula for engineering uses is also deduced with the help of physical conception that the characteristic frequency is in inverse proportion to the square root of mass, with an error of less than 3%.

**Key words** Loudspeaker cone, Ring antiresonance frequency, Exact formula, Approximate formula

### 1 引言

旋转薄壳在某个频段内存在转点(圆柱壳和球壳除外),薄壳理论习惯称此频段为过渡频段,低于该频段称为低频段。对于半顶角为 $\alpha$ ,内外半径分别为 $R_a$ 和 $R_b$ 的扬声器锥形振膜,其低频范围为

$$f < f_{tb} = \frac{c \cdot \cos \alpha}{2\pi R_b} \quad (1)$$

式中 $c = \sqrt{E/\rho}$ ,  $E$ 、 $\rho$ 为振膜材料的杨氏模量和质量密度, $f_{tb}$ 为低频段的上限频率。

文献[1]数值计算结果表明,扬声器锥形振膜作受迫振动时,在低频范围内存在内边缘纵向位移为零的频率,称为环反谐振频率,以 $f_{ra}$ 表示。文献[1]并证明,对于母线无限短的锥环,环反谐振频率 $f_{ra}$ 等于低频上限频率 $f_{tb}$ (pp. 34-35);对母线长度非无限短的锥壳,其 $f_{ra}$ 低于 $f_{tb}$ 的事实,解释为附加质量导致的结果(pp. 37-38),并建议 $f_{ra}$ 的精确结果通过数值计算得到,近似值则可采用 $f_{tb}$ 来代替(pp. 38)。对于一个如下尺寸的典型扬声器纸质振膜: $R_b=83\text{mm}$ ,  $R_a=17\text{mm}$ ,  $\alpha=5^\circ$ ,  $E=$

$2 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ ,  $\rho = 600 \text{ kg/m}^3$ , 文献 [1] 数值计算的  $f_{ra} = 1840 \text{ Hz}$ 。  $f_{tb}$  由 (1) 式得出为  $2250 \text{ Hz}$ , 可见近似是相当粗糙的 (偏差 22.3%)。

$f_{ra}$  对于振动和声辐射有重要意义。低于  $f_{ra}$ , 整个振膜作同相振动; 等于  $f_{ra}$ , 在内边缘出现一节圆; 高于  $f_{ra}$ , 该节圆向外边缘移动, 振膜在节圆两侧作反相振动。  $f_{ra}$  已被证明为近似标志着分割振动起始的第一个横向谐振频率 [2] (文献 [1] 中, 对上述参数扬声器,  $h = 0.23 \text{ mm}$  时, 计算得出第一个横向谐振频率为  $2360 \text{ Hz}$ ), 故可近似认为  $f_{ra}$  为振膜整体振动的截止频率,  $f_{ra} < f < f_{tb}$  为电声工程所谓由整体振动频段到分割振动频段的过渡频段。文献 [1] 指出了  $f_{ra}$  对声辐射的影响 (pp. 150-151): 若  $f_{ra}$  比同样外半径的活塞过渡频率 (活塞声功率在此频率开始下降) 大很多, 则声功率级在上述两频率间出现明显谷值; 若  $f_{ra}$  比相同尺寸的刚性锥体特性频率 (刚性锥体轴向声压在此频率开始下降) 大很多, 则轴向声压级在上述两频率间出现谷值。

本文采用薄膜近似求解了低频段的扬声器锥壳纵向 (母线方向) 位移  $u$  和纵向应力合力  $N_x$ , 由此得到了精确计算  $f_{ra}$  的解析公式, 并给出了适于工程应用的近似公式, 偏差不足 3%。

## 2 扬声器锥壳低频振动

旋转薄壳轴对称振动方程为六阶微分方程, 在低频段采用摄动法求出的六个解中, 四个解是弯矩型的, 二个解是薄膜无矩型的, 由于低频段弯矩效应可以忽略, 但又必须满足六个边界条件, 故四个弯矩解表现为指数衰减的边界层函数, 即弯曲效应仅出现在薄壳边缘。文献 [1] 数值计算的结果表明, 扬声器振膜在其边界条件下, 低频段中振膜的弯曲形变能在总形变能中所占的比值不足 1% (pp. 104)。文献 [3] 的解析结果更表明, 扬声器振膜的纵向位移  $u$  和纵向应力合力  $N_x$  在其边界条件下,

在首次近似中不出现边缘弯曲效应, 故仅求  $u$  和  $N_x$  时只需求解满足薄膜边界条件的无矩方程。

分离时间变量  $e^{j\omega t}$  后, 锥壳轴对称无矩振动方程为 [1]

$$\begin{aligned} \frac{dN_x}{dx} &= \frac{\nu_g - 1}{x} N_x + \frac{Eh}{x^2} (g - k^2 x^2) u \\ \frac{du}{dx} &= \frac{\nu_g - 1}{Eh} N_x - \frac{\nu_g}{x} u \end{aligned} \quad (2)$$

式中  $x$  为纵向坐标 (原点在锥顶),  $x = a$ ,  $b$  为锥壳内、外边缘 ( $b > a$ ),  $\nu$  为泊松比,  $h$  为锥壳厚度,  $\alpha$  为锥壳半顶角,  $k = \omega/c$ ,  $g = 1/(1 - (kx \text{tg} \alpha)^{-2})$  采用幂级数法求得其解为 [3]

$$u(X) = A_1 u_1(X) + A_2 u_2(X) \quad (3.1)$$

$$u_1(X) = \sum_{n=0} a_{2n} X^{2n}$$

$$u_2(X) = \ln X \sum_{n=0} a_{2n} X^{2n} + \sum_{n=1} b_{2n} X^{2n}$$

$$N(X) = A_1 N_{x1}(X) + A_2 N_{x2}(X) \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} N_{x1}(X) &= N_0(x, X) \sum_{n=0} [(2n+2)a_{2n+2} \\ &\quad - (2n+\nu)a_{2n}] X^{2n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_{x2}(X) &= N_0(x, X) \{ X_{-2} \\ &\quad + \sum_{n=0} [(2n+2)a_{2n+2} \ln X + b_{2n+2} \\ &\quad - (2n+\nu)(a_{2n} \ln X + b_{2n}) \\ &\quad + a_{2n+2} - a_{2n}] X^{2n} \} \end{aligned}$$

式中  $A_1$ 、 $A_2$  为待定常数, 新自变量  $X(x) = kx \text{tg} \alpha$ ,  $N_0 = (x, X) = Eh x^{-1} X^2 / [1 - (1 - \nu^2) X^2]$ , 各系数为:

$$a_0 = 1$$

$$a_2 = -c_4/4$$

$$a_4 = c_4^2/64 - c_4/8 - c_5/16$$

以后的系数由下述递推关系推得 ( $n$  取偶

数):

$$0 = n^2 a_n + [(n-2)^2 c_1 - 2\nu^2(n-2) + c_4] a_{n-2} + [(n-4)^2 c_2 + c_5] a_{n-4} + c_6 a_{n-6}$$

$$b_0 = 0$$

$$b_2 = c_4/4 + \nu^2/2$$

$$b_4 = -3c_4^2/128 + c_4/16 + c_5/32 + \nu^2/4$$

以后的系数由下述递推关系推得 ( $n$  取偶数):

$$\begin{aligned} n^2 b_n + [(n-2)^2 c_1 - 2\nu^2(n-2) + c_4] b_{n-2} \\ + [(n-4)^2 c_2 + c_5] b_{n-4} + c_6 b_{n-6} \\ = -2n a_n - 2[(n-2)c_1 - \nu^2] a_{n-2} \\ - 2(n-4)c_2 a_{n-4} \end{aligned}$$

其中  $c_1 = \nu^2 - 2$ ,  $c_2 = 1 - \nu^2$ ,  $c_3 = -2 - \nu^2$ ,  $c_4 = 1 - 2\nu + \text{ctg}^2 \alpha$ ,  $c_5 = -(1 - \nu^2)(1 + 2\text{ctg}^2 \alpha)$ ,  $c_6 = (1 - \nu^2)\text{ctg}^2 \alpha$ .

扬声器振膜的边界条件为内边界径向刚性, 受轴向电磁力驱动, 外边界在环反谐振频率时, 折环的影响已可忽略, 故简化为自由边界 ([1]. pp. 77-78)。相应的薄膜近界条件为

$$N_x(a) = -F_a/(2\pi R_a \cos \alpha), N_x(b) = 0$$

式中  $F_a$  为轴向驱动力,  $R_a$  为内边缘半径。由此定得:

$$\begin{aligned} A_1 &= N_x(a)N_{x2}(b)/[N_{x1}(b)N_{x2}(a) \\ &\quad - N_{x2}(b)N_{x1}(a)] \\ A_2 &= -A_1 N_{x1}(b)/N_{x2}(b) \end{aligned} \quad (4)$$

将上述  $A_1, A_2$  代入式 (3.1) 的  $u(X)$ , 根据内边界径向刚性的条件, 计算得轴向导纳频率响应曲线, 如图 1 所示, 图中坐标已相对低频上限频率  $f_{tb}$  归一化, 横坐标  $X(b) = f/f_{tb}$ , 纵坐标  $|y_a| = |Y_a/f_{tb}|$ , 图中的谷值即为环反谐振现象。可以看出, 低于频率  $f_{ra}$ , 轴向导纳基本上与频率成反比关系, 这正是振膜作整体振动的特征。

### 3 环反谐振频率的计算

将  $A_2$  代入式 (3.1) 的  $u(X)$ , 并令  $u(X(a)) = 0$ , 就得到精确的  $f_{ra}$  公式:

$$\begin{aligned} u_1(X(a))N_{x2}(X(b)) - u_2(X(a))N_{x1}(X(b)) \\ = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

式中, 利用 (1) 式可得环反谐振时的  $X(b) = kb\text{tg}\alpha = f_{ra}/f_{tb}$ ,  $X(a) = ka\text{tg}\alpha = (a/b)f_{ra}/f_{tb} = (R_a/R_b)f_{ra}/f_{tb}$ . 由 (5) 式和 (3) 式可以看出,  $f_{ra}/f_{tb}$  仅与振膜外、内半径的比值和半顶角  $\alpha$  有关。

图 2 示出了扬声器锥形振膜尺寸范围内的  $f_{tb}/f_{ra}$  与  $R_b/R_a$  和  $\alpha$  的精确关系 (实线), 表明对于母线无限短的锥环, 即当  $R_a$  趋近于  $R_b$  时,  $f_{ra}$  事实上趋近于  $f_{tb}$ ; 母线长度  $(R_b - R_a)/\sin \alpha$  愈长 (意味着  $\alpha$  相同时,  $R_b$  与  $R_a$  的比值愈大,  $R_b/R_a$  相同时,  $\alpha$  愈小),  $f_{ra}$  愈小于  $f_{tb}$ . 这与文献 [1] 中无限短母线锥环  $f_{ra} = f_{tb}$  的证明结果和有限长母线锥环附加质量引起  $f_{ra}$  小于  $f_{tb}$  的物理解释相符。

用精确公式 (5) 计算文献 [1] 中扬声器 50.1(pp. 47,  $\alpha = 50^\circ$ ,  $R_a = 17\text{mm}$ ,  $R_b = 83\text{mm}$ ,  $E = 2 \times 10^9 \text{N/m}^2$ ,  $\rho = 600 \text{kg/m}^3$ ,  $\nu = 0.3$ )、60.2(pp. 117、pp. 119,  $\alpha = 60^\circ$ ,  $E = 2.2 \times 10^9 \text{N/m}^2$ ,  $\rho = 1160 \text{kg/m}^3$ , 其余参数同 50.1) 和 70.2(pp. 101、pp.102,  $\alpha = 70^\circ$ , 其余参数同 50.1) 的  $f_{ra}$ , 与文献 [1] 数值计算得出的结果完全相同 (结果列于表 1 中)。

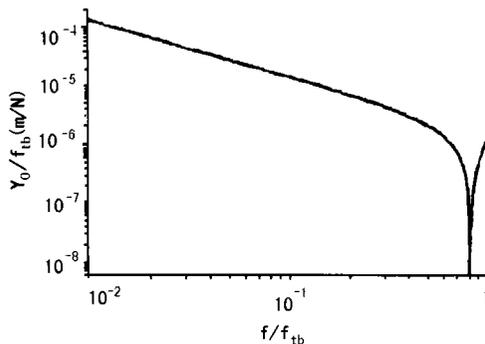


图 1 归一化的轴向导纳

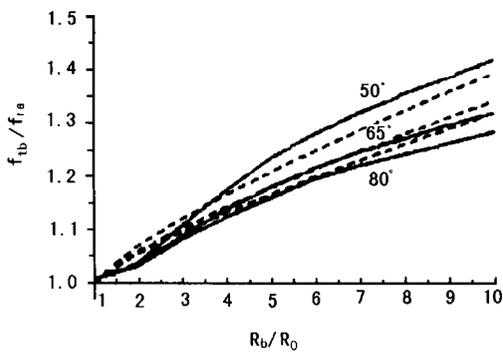


图2  $f_{tb}/f_{ra}$  与  $R_b/R_a$  和  $\alpha$  的关系  
(精确值: 实线; 近似值: 虚线)

为便于工程应用, 根据下述物理模型尝试得到计算  $f_{ra}$  的简化计算公式。如上述, 半径为  $R_b$  的母线无限短锥环,  $f_{ra}$  事实上等于  $f_{tb}$ , 该锥环质量为  $2\pi\rho hR_b\delta x$ ,  $\delta x$  为锥环母线长度。把外半径同为  $R_b$  的母线有限长锥壳想像为一个半径为  $R_b$  的锥环和相当硬的延伸向锥顶的内部, 锥环将其环反谐振传到锥壳基部, 但由于附加了质量  $\rho h\pi(R_b^2 - R_a^2)/\sin\alpha$  而使  $F_{ra} < F_{tb}$ 。根据特征频率反比于质量平方根的物理概念和精确公式所表明的  $f_{tb}/f_{ra}$  决定于  $R_b/R_a$  和  $\alpha$ , 尝试得到如下近似公式:

$$f_{ra} = \left(1 + \frac{R_b/R_a - R_a/R_b}{14.5 \sin \alpha}\right)^{\frac{1}{2}} f_{tb} \quad (6)$$

(上接第 32 页)

此外, 一般非共振情况下, 增大板厚和肋骨惯性矩可以有效的降低结构声辐射; 减小板面积或肋骨间距可降低声辐射, 但效果不明显; 加强边界约束对结构声辐射影响不大; 改为细长板格(即增大边长比)还会增大结构声辐射。数值计算还表明: 板材对结构声辐射有很大影响。另外, 对本文中算例, 结构在水中的声辐射远大于在空气中的声辐射, 而且在水中的辐射声功率随激励频率变化远较在空气中平缓。

总之, 在实际的加肋板结构振动声辐射预报和控制中, 应根据以上的加肋板结构声辐射特性, 对具体情况作具体分析, 以找出较优的声学设计方案或声辐射控制措施。

应用声学

近似计算结果如图 2 中虚线所示, 与精确计算结果偏差在 3% 以内, 完全能满足工程估算所用。表 1 列出了上述扬声器的对比计算结果。

表 1 环反谐振频率的近似计算结果与精确计算结果对比

扬声器	50.1	60.2	70.2
$f_{tb}$ (Hz)	2250	1321	1197
精确计算值 $f_{ra}$ (Hz)	1840	1121	1032
近似计算值 $f_{ra}$ (Hz)	1887	1127	1033
偏差 (%)	2.6	0.6	0.1

## 4 结论

由精确公式计算的  $f_{ra}$  与文献 [1] 的结果完全相符, 表明在低频段采用薄膜无矩近似求解  $u$  和  $N_x$  的方法和结果是正确可行的。近似计算公式简洁方便, 且其偏差之小, 非常适合工程应用。

## 参 考 文 献

- 1 弗兰科特, 赵志诚译. 扬声器锥体的振动和声辐射. 北京: 科学出版社, 1988.
- 2 陶擎天, 张志良. *J Sound Vib*, 1988, **217**(1): 33-41.
- 3 张志良, 陶擎天. 南京大学学报, 1999, **35**(4): 436-442.

## 参 考 文 献

- 1 张升明, 潘旭初. 噪声与振动控制, 1995, (5): 9-13.
- 2 Sgard F, Atalla N, Nicolas J. *AIAA Journal*, 1994, **32**(12): 2351-2358.
- 3 诺顿 M P. 工程噪声和振动分析基础(盛元生等译). 北京: 航空工业出版社, 1993. 113-115.
- 4 Everstine G C, Henderson F M. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1990, **87**(5): 1938-1947.
- 5 Masson P, Berry A, Nicolas J. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1997, **102**(3): 1588-1599.
- 6 陈新. 机械结构动态设计理论方法及应用. 北京: 机械工业出版社, 1997. 97-98.
- 7 Berry A, Locqueteau C. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1996, **100**(1): 312-319.