

进一步改进边界元方法以克服振动声辐射计算 中解的非唯一性 *

王秀峰 陈心昭

(合肥工业大学机械与汽车工程学院 合肥 230009)

2001 年 2 月 26 日收到

摘要 文章利用基于三次 B 样条插值的边界元方法, 对振动体外部声辐射问题进行了研究, 对 CHIEF 法及其改进方法作了进一步的改进, 提出在加权余量意义下, 通过把内部 Helmholtz 积分方程与其对内点坐标取导后的方程式作线性叠加, 在域外构造的一个小体积块上进行积分以形成补充方程, 经与表面 Helmholtz 积分方程相结合, 来求解任意频率下的声辐射问题。并以脉动球和摆动球作为算例, 说明本文提出的方法能够有效地克服在特征频率处解的非唯一性问题。

关键词 边界元方法, 声辐射, 三次 B 样条函数, CHIEF 法

Overcoming the non-uniqueness of solution in the calculation of acoustic radiation by a vibrating body with a further improved boundary element method

WANG Xiufeng CHEN Xinzhaoh

(School of Mechanical and Automobile Engineering, Hefei University of Technology, Hefei 230009)

Abstract A study is presented of the calculation of the acoustic radiation by the vibrating body, based on the boundary element method using cubic B-spline interpolating function. As a further improvement of the CHIEF method, we suggest in this paper to linearly combine the interior Helmholtz integral equation with its derivatives with respect to the coordinates in a weighted residual sense over a small interior region to form an extra equation, in order to solve the acoustic radiation problems at any frequency with the boundary Helmholtz integral equations. Taking pulsating sphere and oscillating sphere as examples, it's verified that the method put forward in this paper can effectively overcome the non-uniqueness problem.

Key words Boundary element method, Acoustic radiation, Cubic B-spline function, CHIEF method

* 国家自然科学基金 (59575017) 和机械工业发展基金资助项目 (97JA1014)

1 引言

边界元方法 (BEM) 以其降维及适应无限域问题等优势确定了其在声辐射问题计算中的主导地位, 但是利用 BEM 计算振动体外部声辐射时存在着在其相应的内部问题的特征频率处, 其解具有非唯一性, 因而, 在这些特征频率处, 计算结果与实际情况存在着显著的误差, 特别是对于中高频率段的振动问题, 其特征频率分布更加密集, 如果不能有效地克服非唯一性问题, 将会导致计算结果严重失真。

目前已有多种计算方法用以克服非唯一性问题^[1-7]。其中由 Schenck 提出的 CHIEF 法^[1]因工程计算易于实现,且计算量增加不大,在经过后人的不断改进后,已成为一种很具代表性的方法。

CHIEF 法是通过在域外选取的若干内点 (称为 CHIEF 点) 构作相应的内部 Helmholtz 积分方程作为补充方程与边界 Helmholtz 积分方程联立, 然后在最小二乘意义下求得问题的唯一解。文献 [8]、[9] 对 CHIEF 法作了改进, 将 CHIEF 点上的 Helmholtz 积分方程与其沿坐标的导数式作线性叠加后作为补充方程。文献 [10] 以 CHIEF 块代替 CHIEF 点在加权余量意义下形成内部 Helmholtz 积分方程及其关于坐标的导数方程式, 并以此作为补充方程式。

本文对 CHIEF 法作了进一步的改进, 提出在加权余量意义下, 通过将内部 Helmholtz 积分方程以耦合参数与其对坐标求导后的方程式的联立在域外构造的一个体积块上进行积分, 从而形成补充方程, 协同边界 Helmholtz 积分方程, 形成超定方程, 然后在最小二乘意义下进行求解; 并以三次 B 样条为插值函数, 实现边界粗剖分条件下结构振动声辐射在全波数范围内的计算。

2 边界 Helmholtz 积分方程及特征频率问题的处理

结构振动在理想流体介质的无限域中引起

的小振幅简谐声波的声辐射问题可通过如下微分控制方程、Neumann 边值条件以及 Sommerfeld 辐射条件来描述

$$\begin{cases} \nabla^2 \Phi(x) + k^2 \Phi(x) = 0 & x \in D_+ \\ \frac{\partial \Phi(p)}{\partial n} = V(p) & p \in S \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r \left\{ \frac{\partial \Phi(x)}{\partial r} + i k \Phi(x) \right\} = 0 & x \in D_+ \end{cases} \quad (1)$$

其中: $k = 2\pi f/c$ 为声波波数, c 为声速, f 为分析频率; S 为振动体的边界表面, 其外部区域记作 D_+ , 而内部区域记作 D_- ; x 表示空间 D_+ 中一点, $\Phi(x)$ 是 x 点的速度势函数; p 是边界 S 上一点; n 是 S 的单位法向矢量 (背离分析域为正); r 是场点 x 与边界上或内域中一定点之间的距离。

利用直接边界积分方程, 式 (1) 可写成边界 Helmholtz 积分方程形式

$$c(p)\Phi(p) = \int_S \left(G(p, q) \frac{\partial \Phi(q)}{\partial n_q} - \Phi(q) \frac{\partial G(p, q)}{\partial n_q} \right) dS_q \quad (2)$$

式中: $\frac{\partial \Phi(q)}{\partial n_q}$ 为速度势在边界 q 点上的法向导数, 由已知的振动体表面振速决定; $c(p)$ 为奇性系数; $G(p, q)$ 为自由空间的 Green 函数。

式 (1) 描述的边值问题, 其解是唯一的, 但是一旦采用边界 Helmholtz 积分方程 (2) 对问题进行求解, 其解在某些波数处就会出现非唯一性^[1]。解的非唯一性的产生是由于在这些波数处, 式 (1) 与式 (2) 之间不存在对等性。

为此, 如图 1 所示, 在域 D_- 内距边界一定距离处, 构造一个不与分析域交割的、棱长

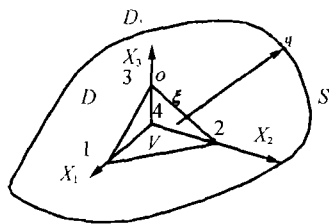


图 1 CHIEF 块示意图

是 h 的 CHIEF 块 (四面体 V)，对四面体 V 的任一端点 o (o 可取点 1, 2, 3 或 4)， ω_0 为定义在 V 上的权函数，则有

$$0 = \int_S \left[\Gamma(o, q) \frac{\partial \Phi(q)}{\partial n_q} - \frac{\partial \Gamma(o, q)}{\partial n_q} \Phi(q) \right] dS_q \quad (3)$$

式中

$$\left\{ \begin{aligned} \Gamma(o, q) &= \frac{1}{\alpha_0} \int_V \omega_0(\xi) \left(G(o, q, \xi) + \sum_{j=1}^3 m_j \frac{\partial G(o, q, \xi)}{\partial x_j^o} \right) dV(\xi) \\ \frac{\partial \Gamma(o, q)}{\partial n_q} &= \frac{1}{\alpha_0} \int_V \omega_0(\xi) \left(\frac{\partial G(o, q, \xi)}{\partial n_q} + \sum_{j=1}^3 m_j \frac{\partial^2 G(o, q, \xi)}{\partial x_j^o \partial n_q} \right) dV(\xi) \end{aligned} \right. \quad (4)$$

式中， α_0 称为标定因子，如下定义

$$\alpha_0 = \int_V \omega_0(\xi) dV(\xi) \quad (5)$$

其中

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(o, q, \xi)}{\partial n_q} &= - \left(\frac{1}{r} + ik \right) \frac{\partial r}{\partial n_q} G(o, q, \xi), \\ \frac{\partial G(o, q, \xi)}{\partial x_j^o} &= \left(\frac{1}{r} + ik \right) r_{,j} G(o, q, \xi), \\ \frac{\partial^2 G(o, q, \xi)}{\partial x_j^o \partial n_q} &= G(o, q, \xi) \left((ikr + 1) n_{qj} + (k^2 r^2 - 3ikr - 3) r_{,j} \frac{\partial r}{\partial n_q} \right) / r^2 \\ G(o, q, \xi) &= \frac{e^{ikr}}{4\pi r}, \quad r = (r_m r_{,m})^{(1/2)}, \\ r_m &= q_m - \xi_m, \quad r_{,m} = r_m / r, \\ \frac{\partial r}{\partial n_q} &= r_{,m} n_{qm} \end{aligned}$$

其中， m_j 为耦合常数，取 $m_1 = m_2 = m_3 = i/k$ ， i 为虚数单位； ξ_m 、 q_m 分别为四面体上变点 ξ 和边界点 q 的坐标分量， $m = 1, 2, 3$ 。将 (3) 式与 (2) 式联立，构成与 (1) 式等价的超定方程组，可较好地处理特征频率下解的非

唯一性问题。

至于 CHIEF 块，当然还可以取作立方体、球缺体等等，但采用四面体计算最简单。如图 1 中，CHIEF 块可以通过质心坐标和棱长 h 两个参数予以确定。关于棱长 h ，只要整个 CHIEF 块能够完全位于 D_- 内，其的选择可以任意。只是 h 太小时，CHIEF 块会蜕化为 CHIEF 点；但若取得过大，计算加权余量公式的体积分时，就需要采用太多的积分点，增加了计算量。较合宜的 h 尺寸选取应接近表面单元格的特征尺寸或与形体半径的 10% 相当。此外，权函数 ω_0 的选取也具任意性，最方便的还是选择四面体的四个线性形函数^[11]。

3 三次 B 样条函数插值的边界元方法

至此，已经扼要地列出了计算结构振动声辐射的 Helmholtz 积分方程的有关列式。但是，工程中绝大多数声辐射问题无法用解析解的形式求解，所以还需要在此基础上通过几何剖分和变量插值，把无限自由度问题化为有限自由度问题后才好做数值分析工作。几何剖分的原则和插值方法跟有限元法相同。本文采用高光滑度的直到二阶导数都连续的三次 B 样条函数插值^[12,13]。

在空间问题中经过几何变换，将原边界上的歪扭网格映射为 $\eta - \xi$ 平面上的矩形网格，则 (q_1, q_2) 结点处的二维三次 B 样条插值形函数表示为

$$N_{q_1 q_2}(\eta, \xi) = N_{q_1}(\eta) \cdot N_{q_2}(\xi) \quad (6)$$

其中， $N_{q_1}(\eta)$ 和 $N_{q_2}(\xi)$ 分别是在 η 和 ξ 方向的一维三次 B 样条插值形函数，其计算参见文献 [12]。

由于 $\frac{\partial G(p, q)}{\partial n}$ 、 $G(p, q)$ 在边界 S 上的积分仅具有弱奇性，因此，边界 S 通过几何变换、剖分和边界量的三次 B 样条插值后，边界积分方程 (2) 即可表示为如下的矩阵形式

$$[A_{pq}]\{\Phi(q)\} = [B_{pq}]\left\{\frac{\partial\Phi(q)}{\partial n_q}\right\} \quad (7)$$

其中

$$\begin{aligned} A_{pq} &= \sum_{e'=1}^{n_e} \int_{S_{e'}} \frac{\partial G(p, q)}{\partial n_q} N_{q_1} N_{q_2} J d\eta d\xi + \delta_{pq} c_p \\ B_{pq} &= \sum_{e'=1}^{n_e} \int_{S_{e'}} G(p, q) N_{q_1} N_{q_2} J d\eta d\xi \end{aligned} \quad (8)$$

式中: n_e 为边界 S 上单元 e 的总数, e' 、 $S_{e'}$ 分别是实际振动体边界上的 e 、 S_e 在几何变换后的平面上的对应量, J 为 Jacobian 因子。

类似地, (3) 式可化为

$$[C_{pq}]\{\Phi(q)\} = [D_{pq}]\left\{\frac{\partial\Phi(q)}{\partial n_q}\right\} \quad (9)$$

其中

$$\begin{aligned} C_{pq} &= \sum_{e'=1}^{n_e} \int_{S_{e'}} \frac{\partial \Gamma(p, q)}{\partial n_q} N_{q_1} N_{q_2} J d\eta d\xi \\ D_{pq} &= \sum_{e'=1}^{n_e} \int_{S_{e'}} \Gamma(p, q) N_{q_1} N_{q_2} J d\eta d\xi \end{aligned} \quad (10)$$

这样, 在振动体边界上的结点振速 $\{\partial\Phi(q)/\partial n_q\}$ 已知的情况下, 通过求取系数矩阵 $[A_{pq}]$ 、 $[B_{pq}]$ 、 $[C_{pq}]$ 和 $[D_{pq}]$, 联合式 (7)、式 (9) 利用最小二乘法就可以求出边界结点上的速度势函数 $\Phi(q)$, 进而求出边界 S 上的声压值。

公式 (4)、(5) 中的积分采用 Hammer 积分进行数值求积^[11], 公式 (8)、(10) 中的积分采用标准二维 Gaussian 格式进行数值求积; 而对于式 (8) 中出现的弱奇异积分, 本文采用 [12] 中的极坐标变换法进行处理。

4 算例

对于半径为 a 、均匀径向速度是 v 的脉动球, 其产生的表面声压为

$$P(a) = iv\rho cka/(1 + ika) \quad (11)$$

对于半径为 a 、径向速度是 $v \cos \theta$ (θ 是结点处外法线与摆动方向 X_3 轴之间的夹角) 的摆动球, 其产生的表面声压为

$$P(a) = (v \cos \theta) \frac{i\rho cka(1 + ika)}{2(1 + ika) - (ka)^2} \quad (12)$$

如图 2 所示, 对 $a = 0.1\text{m}$ 、 $v = 0.1\text{m/s}$ 球表面剖分为 24 个单元, 结点数 20。声速 $c = 341\text{m/s}$, 空气密度 $\rho = 1.2\text{kg/m}^3$ 。

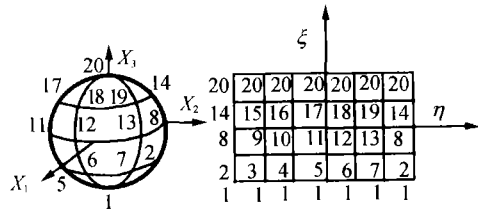


图 2 球表面的剖分及几何变换

图 3 给出了利用本文的方法求得的脉动球表面声压数值解与精确解之间的比较及误差。图 4 给出了利用本文的方法求得的摆动球表面 (以结点 14 为例) 声压数值解与精确解之间的比较及误差。

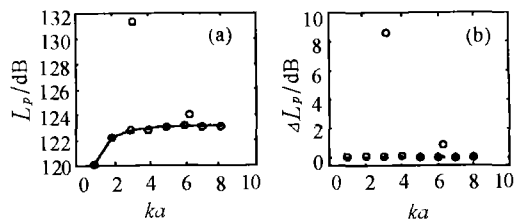


图 3 脉动球的计算结果

— 精确解 ● 本文方法
○ 普通的三次样条边界元方法

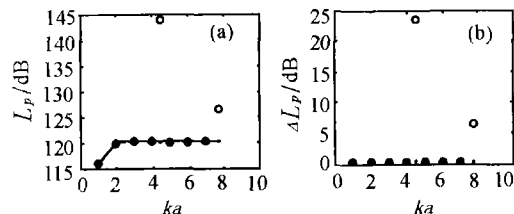


图 4 摆动球的计算结果

— 精确解 ● 本文方法
○ 普通的三次样条边界元方法

作者还对该二算例利用三次 B 样条函数作为插值函数的一般边界元方法, 计算其表面声压, 结果发现, 在脉动球的特征波数满足 $ka = \pi, 2\pi, \dots$ 处和摆动球的特征波数满足 $ka = 4.4934, 7.7252 \dots$ 处^[13], 一般边界元方法的计算结果严重失真, 而利用本文的方法, 包括在特征波数处, 最大误差分别只有 0.119dB 和 0.142dB。

5 结论

特征频率下解的非唯一性问题是利用边界元方法实施全波数范围内振动体声辐射计算的一个关键问题。本文提出, 在加权余量意义下, 通过把内部 Helmholtz 积分方程与其对坐标求导后的方程式线性叠加后, 在域外构造的一个体积块上进行积分以形成补充方程, 来处理特征频率下解的非唯一性问题; 采用具有良好插值效果的三次 B 样条函数构造形函数, 使得结构振动声辐射的计算能够在边界剖分较粗的情况下进行。算例的结果表明这种方法形式简便, 计算量小, 精度高, 处理非唯一性问题

更可靠。

参 考 文 献

- 1 Schenck H A. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1968, **44**(1): 41-58.
- 2 Burton A J, Miller G F. *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, 1971, **323**: 201-210.
- 3 Ursell F. *Proc. Camb. Philos. Soc.*, 1973, **74**: 117-125.
- 4 Jones D S. *J. Mech. Appl. Math.*, 1974, **27**: 129-142.
- 5 Martin P A. *J. Mech. Appl. Math.*, 1980, 33.
- 6 Brod K. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1984, **76**.
- 7 Cunefare K A, Koopmann G, Brod K. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1989, **85**(1): 39-48.
- 8 赵键, 汪鸿振, 朱物华. 声学学报, 1989, **14**(4): 250-257.
- 9 Lee L, Wu T W. *Engineering Analysis with Boundary Element*, 1993, 12: 75-83.
- 10 Wu T W, Seybert A F. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1991, **90** (3): 1608-1614.
- 11 王勖成, 邵敏. 有限单元法基本原理和数值方法. 北京: 清华大学出版社, 1998.
- 12 王有成. 工程中的边界元方法. 北京: 中国水利水电出版社, 1996.
- 13 张胜勇. 机器声辐射计算的新型数值方法的研究. (博士学位论文): 合肥工业大学, 1998.

~~~~~

## 浙江省电力系统噪声综合治理研讨会在杭州举行

为贯彻执行江泽民主席 2001 年第 60 号令 [中华人民共和国职业病防治法], 浙江省电力工业局于 2001 年 11 月 30 日在杭州召开了所属各发电厂、电力公司、研究所等 23 个单位 50 名代表参加的噪声综合治理研讨会。省电力局和省电力试验研究所首先介绍了对浙江省 16 个发电厂噪声普查及听力保护调查情况, 监测了 323 个岗位, 2700 个测点, 取得了大量第一手资料。发电厂噪声源颇多, 等效声级超过 90dB (A) 的噪声源有磨煤机、给水泵、送风机、励磁机、汽轮机、空压机和循环泵等。每工作日 8 小时暴露于等

效声级大于等于 85dB(A) 岗位有 149 个, 占被调查岗位的 46%。电厂噪声直接影响到操作者的身心健康。已引起各级领导的重视, 噪声性耳聋是职业病之一。国家电力系统“十五”规划明确指出, 作业场所噪声合格率 [L] 要达到 80% 以上。在研讨会上上海第九设计研究院吕玉恒高级工程师介绍了电厂磨煤机等噪声治理的实践, 各厂交流治理情况, 省电力局布置了下阶段工作安排。

(中国船舶工业第九设计研究院 吕玉恒)