

小尺度阻尼边界封闭空间声传递函数的有限元素法计算 *

宁方立 陈克安 孙进才

(西北工业大学航海工程学院 西安 710072)

2001 年 8 月 7 日收到

摘要 如何求解阻尼边界封闭空间中声源点到接收点的低频声传递函数已成为目前小尺度封闭空间可听化技术研究的关键技术。能处理任意形状及复杂边界条件的有限元素法可作为求解该问题的适合方法。以室内声场有源 Helmholtz 方程及其相应边界方程为基础, 本文推导出了用于小尺度阻尼边界封闭空间声传递函数的有限元素求解方法, 并编制了相应的计算机程序。在算例中, 首先通过与模态叠加法计算结果进行比较, 验证了该方法的正确性; 最后计算了某型车体内腔中任意两点间声传递函数。

关键词 有限元素法, 小尺度封闭空间, 可听化, 声传递函数

Use of finite element method for computing sound transfer function in small enclosed-room with damped boundary

NING Fangli CHEN Ke'an SUN Jincai

(College of Marine Engineering, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072)

Abstract How to compute low frequency sound transfer function from source to receiver in an enclosed room has become a key problem in small-enclosed room auralization. Due to its ability to process boundary conditions of arbitrary shape and complexity, finite element method (FEM) may be used to solve this problem. In this paper, based on Helmholtz equation with sources and its boundary equations, equation for FEM is first given for computing sound transfer function in a small enclosed-room; secondly, computer program is written for a rectangular enclosed-space and the result of computing is compared with that given by the mode superposition method; finally, sound transfer function inside one kind of car is computed.

Key words Finite element method, Small enclosed-room, Auralization, Sound transfer function

* 国家自然科学基金资助项目 (19874050)

1 引言

可听化技术的研究已成为现代声学领域的一个热门话题^[1]。在实际生活和工作中,人们常遇到许多小尺度(与波长相比)封闭空间环境,例如:小型厅堂、轿车、飞机、船舶舱体室等等。因此,除建筑声学领域外,许多汽车、飞机公司也急需使用小尺度封闭空间可听化技术模拟汽车、飞机等内部的声场环境以便于改善听音效果、降低内部噪声,从而节省制造样机的成本、缩短设计开发周期。如何求解小尺度封闭空间内声源点到接收点的声传递函数是进行可听化技术研究的首要问题^[2]。对于小尺度封闭空间中声波的低频部分,由于声波波长与空间尺寸相当,在声传播过程中将发生波的衍射、散射等现象。目前以几何声学为基础的可听化方面的成熟软件以及许多研究成果尚无法解决这一问题^[2]。因此对于声波中低频部分,就需要利用以波动声学为基础的分析方法。

基于波动声学的声场空间的模拟方法可分为模态叠加法和数值计算方法。

模态叠加法是在已知室内声场的各阶简正频率、声源位置及体积速度的情况下,利用波动声学中模态叠加的方法求解得到低频声传递函数。这种方法局限性在于^[3]:首先,仅能处理刚性壁面及小阻尼边界的房间;其次,通常只有一些几何形状很规则的房间,例如矩形、球形、圆柱形房间等,才具有简正频率的表达式,进而利用该方法求解低频声传递函数。因此,这种方法通常作为其他数值分析方法的验证方法。

数值计算方法中有限元素法作为求解常微分方程和偏微分方程的解法已被广泛地应用于机械设计、热力学、电磁学、流体力学等众多领域,并已开发出许多成熟的商业软件。有限元素法的主要优点在于:首先,能够处理任意形状的求解域;其次,能够解决复杂边界问题。有限元素方法在声学方面的应用多数被用于进行声场模态分析^[4,5],由于所依据的有限元素

控制方程不同,这些分析方法无法直接用于求解声传递函数。

2 阻尼边界条件下有限元素法计算模型

假定封闭空间内存在声源,并且该声源是任意分布的,它在单位时间内向单位体积的空间提供了 $\rho_0 q(\vec{r}, t)$ 的媒质质量。利用与推导无源波动方程相类似的方法,可以得到有源情况下室内声压 $p(\vec{r})$ 的波动方程^[6]:

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \rho_0 \frac{\partial q}{\partial t} \quad (1)$$

其中, c_0 —声音在空气中传播速度; ρ_0 —空气密度。

取声源作简谐振动的,声源函数可写为:

$$q(\vec{r}, t) = q_0(\vec{r}) e^{j\omega t} \quad (2)$$

其中, ω —谐振频率。

由于所考虑的系统是线性系统,则室内各点声压是作同频振动,声压可表示为:

$$p(\vec{r}, t) = p(\vec{r}, \omega) e^{j\omega t} \quad (3)$$

将式(2)、(3)代入式(1)并经过整理可得到有源的Helmholtz方程^[3]:

$$\nabla^2 p(\vec{r}, \omega) + \left(\frac{\omega}{c_0}\right)^2 p(\vec{r}, \omega) = -j\rho_0 \omega q_0(\vec{r}) \quad (4a)$$

这样便将相对应的时域问题转化为频域问题。

式(4a)同时也成为建立有限元素方程的控制方程。为了书写的方便令: $p = p(\vec{r}, \omega)$, $u = -j\rho_0(\vec{r})$, $k = \omega/c_0$ 波数。则有源Helmholtz方程为:

$$\nabla^2 p + k^2 p = u(\vec{r}, \omega) \quad (4b)$$

在我们的研究中同时考虑了刚性壁面和吸收壁面两种在封闭空间中常见的边界。如图1所示,设封闭空间D, 体积为V, 内壁总面积为S, 其中, S1为刚性壁表面、S2为吸收

壁表面。则在边界上与有源 Helmholtz 方程相应边界方程分别为:

$$\frac{\partial p}{\partial n} = 0 \quad \text{S1边界上} \quad (5)$$

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -i\rho\omega \frac{p}{z_s} \quad \text{S2边界上} \quad (6)$$

其中, i —虚数单位 $\sqrt{-1}$; n —封闭区域壁面外法线方向; z_s —吸收壁面 S2 内表面上的声阻抗。

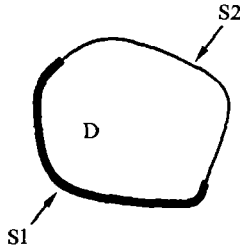


图 1 封闭区域

存在下面的泛函方程:

$$I(p) = \int_v \left[\frac{1}{2}(\nabla p)^2 - \frac{1}{2}k^2 p^2 = up \right] dv + \int_{S2} \frac{1}{2} i\rho\omega \frac{p^2}{z_s} ds \quad (7)$$

而与式 (4) 控制方程和式 (5)、式 (6) 边界条件等价的方程是使式 (7) 的泛函取最小值的变分方程, 即

$$\frac{\partial I(p)}{\partial p} = 0 \quad (8)$$

将图 1 中区域 D 划分为若干个有限元素单元的组合, 则声压 p 在每个单元内的分布为:

$$p^e = \sum_{i=1}^n N_i p_i = \{N\} \{p^{(e)}\} \quad (9)$$

其中, n —元素的节点数; p_i —节点上的声压值; N_i —节点 i 上的形状函数。

与式 (8) 的变分方程相对应的单元体变分方程为

$$\begin{aligned} \frac{\partial [p^e]}{\partial p_i} &= \int_v \left[\nabla p^e \frac{\partial}{\partial p_i} (\nabla p^e) - k^2 p^e \frac{\partial p^e}{\partial p_i} + u \frac{\partial p^e}{\partial p_i} \right] dv \\ &+ \int_{S2} i\rho\omega \frac{1}{z_s} p^e \frac{\partial p^e}{\partial p_i} ds \\ &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

$$i = 1, 2, \Lambda, n$$

将式 (9) 代入式 (10) 单元体变分方程中, 可得:

$$\begin{aligned} \frac{\partial I(p^e)}{\partial p_i} &= \int_v \left[\frac{\partial \{N\}^T}{\partial x} \{p^{(e)}\} \frac{\partial N_i}{\partial x} + \frac{\partial \{N\}^T}{\partial y} \{p^{(e)}\} \frac{\partial N_i}{\partial y} + \frac{\partial \{N\}^T}{\partial z} \{p^{(e)}\} \frac{\partial N_i}{\partial z} \right. \\ &- k^2 \{N\}^T \{p^{(e)}\} N_i + u N_i \left. \right] dv \\ &+ \int_{S2} i\rho\omega \frac{1}{z_s} \{N\}^T \{p^{(e)}\} N_i ds \\ &= 0 \end{aligned} \quad (11)$$

$$i = 1, 2, \Lambda, n$$

将上式经过整理可得到单元体的有限元素方程:

$$\begin{aligned} \{f\}^{(e)} &= [K]^{(e)} \{p^{(e)}\} - k^2 [M]^{(e)} \{p^{(e)}\} \\ &+ i\rho\omega [C]^{(e)} \{p^{(e)}\} \end{aligned} \quad (12)$$

其中各单元矩阵中第 i 行第 j 列上元素分别为:

$$\begin{aligned} K_{ij} &= \int_v \sum_{k=1}^m (\partial_k N_i \cdot \partial_k N_j) dv \\ C_{ij} &= \int_{S2} N_i N_j / z_s ds \\ M_{ij} &= \int_v N_i \cdot N_j dv \\ f_i &= \int_{S2} u N_i ds \quad i, j, \Lambda, n \end{aligned}$$

按照有限元素法中的单元组合规则, 可得到系统的整体矩阵:

$$\begin{aligned} [M] &= \sum_e [M]^{(e)} & [K] &= \sum_e [K]^{(e)} \\ [C] &= \sum_e [C]^{(e)} & \{f\} &= \sum_e \{f_i\}^{(e)} \end{aligned} \quad (13)$$

从而可得到系统的有限元素方程:

$$\{f\} = ([K] + 2ip\omega[C] - \omega^2[M])\{p\} \quad (14)$$

利用标准的有限元素响应求解方法, 由上式求得节点处的声压值 $\{p\}$ 。进而, 接收点处的声压值可由式 (9) 组装得到。

在可听化技术研究中, 接收点与声源点之间的声传递函数是声源点和房间特性的函数。利用有限元素方法得到的各频率点处接收点的声压值便可作为从声源点到接收点的声传递函数。

3 算例及结果分析

3.1 矩形封闭空间算例

为了便于使用模态叠加法验证本文推导的有限元素求解方法的正确性, 选取矩形, 小阻尼边界条件壁面封闭空间作为算例, 如图 2 所示。模态叠加法计算小阻尼边界条件封闭空间声传递函数的方法见文献 [3]。

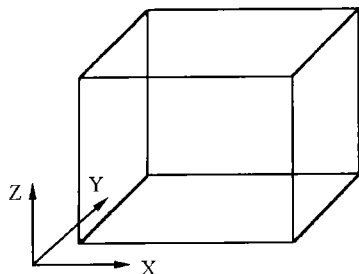


图 2 矩形封闭空间

该封闭空间的参数是, 长度 $L_x = 1.0\text{m}$; 宽

度 $L_y = 1.1\text{m}$; 高度 $L_z = 1.2\text{m}$ 。边界条件是, 在 y 方向的两壁面上具有小阻尼边界条件, 声阻抗: $z_x = 40\rho_0 c_0$ 。声源情况是, 声源为点声源, 体积速度 $Q_0 = 2 \times 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s}$ 。声源位于 $(0, 0, 0)$ 处。接收点位于 $(0.8, 0.6, 0.9)$ 处。

在我们的分析中, 有限元素单元取三维二十节点等参单元。图 3 为有限元素网格划分情况, 图 4 为 500Hz 时的声传递函数幅值在封闭空间上的分布图。图 5、图 6 中的两条折线分别为使用有限元素方法和模态叠加法计算的声源点到接收点声传递函数的幅值和相位。

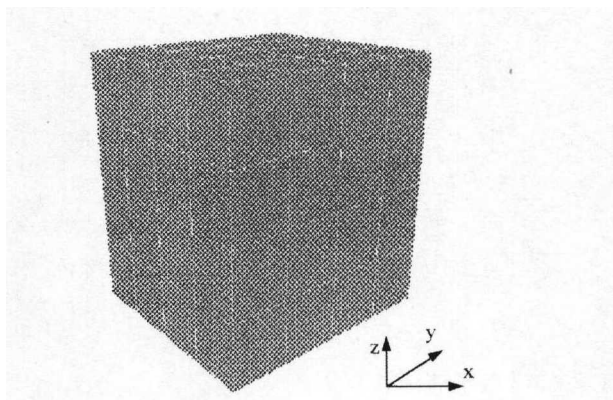


图 3 有限元素网格划分图

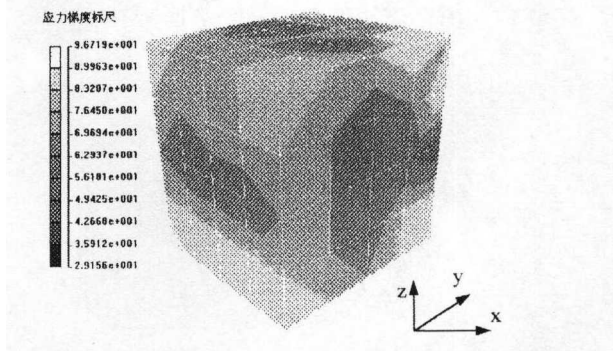


图 4 500Hz 声传递函数在封闭空间上的分布

对于本文的封闭空间模型, 在所给低频部分, 有限元素法与经典模态叠加法得到的声传递函数具有很好的吻合性。但是随着频率的增高, 二者的差别会随之增大。这是因为在高频部分, 单位频率内声场模态数目会增加 [7], 为了达到与低频相同的计算精度, 有限元素法单

元数目将剧增以至难以实施。因此, 求解高频部分的声传递函数, 不宜采用有限元素法, 而应采用以几何声学为基础的求解方法。

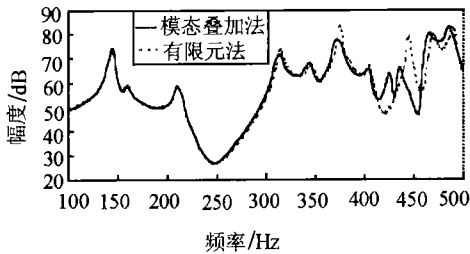


图 5 声源点到接收点声传递函数的幅值

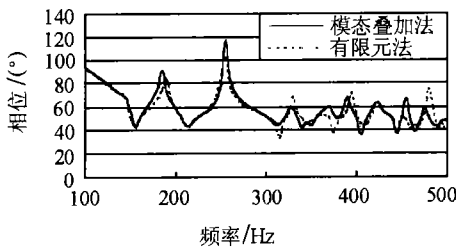


图 6 声源点到接收点声传递函数的相位

3.2 车体形状算例

我们还使用某型车体内腔作为算例模型。计算该腔体内两点之间的低频声传递函数。车体内腔的有限元素模型如图 7 所示。

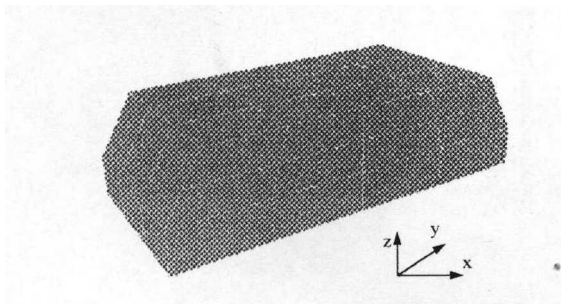


图 7 车体内腔的有限元素模型

车体内腔的几何参数是, 长 $L_x = 3.0\text{m}$; 宽 $L_y = 1.4\text{m}$, 高 $L_z = 0.8\text{m}$ 。车体前后倾角 30° 。边界条件是, 在车体底部为阻尼边界, 声阻抗: $Z_s = 40\rho_0 c_0$ 。声源为点声源, 体积速度 $Q_0 = 2 \times 10^{-5}\text{m}^3/\text{s}$, 声源位于 $(0, 0, 0)$

处。接收点位于 $(0.8, 0.5, 0.6)$ 处。

在该算例中, 我们仍然选取三维二十节点等参单元。图 8,9 分别为声源点到接收点的声传递函数的幅度和相位。

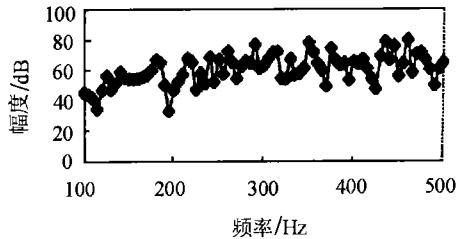


图 8 声源点到接收点的声传递函数的幅度

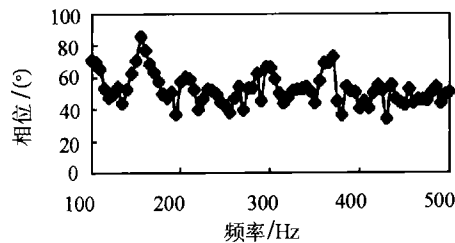


图 9 声源点到接收点的声传递函数的相位

对于不规则形状的封闭空间, 不能使用模态叠加法验证有限元素法计算的精度及确定上界频率。在声学理论中, 通常将 Schroeder 频率 $f_s = 2000\sqrt{T/V}$ (其中 T 为混响时间、 V 为房间体积) 作为室内声场波动计算方法的上界频率^[3]。高于 Schroeder 频率后, 振动模态将剧烈重叠。波动声学无法计算该频率段的各振动频率, 需使用几何声学的方法解决室内声学问题。对本算例中车体形状, 混响时间 $T \approx 0.1\text{s}$, 体积 $V \approx 3.3\text{m}^3$, 因此 Schroeder 频率 $f_s = 350\text{Hz}$ 。

由于不规则形状的封闭空间的低频声传递函数的精确值无法求解, 若需求解有限元素法的计算误差, 要使用后置误差分析方法进行分析。这将是随后工作的重点。

4 结论

以室内声场有源 Helmholtz 方程及其相应

边界方程为基础, 本文推导出了求解小尺度阻尼封闭空间低频声传递函数的有限元素方程并编制了相应的计算机程序。在算例中, 首先使用该方法求解了一个矩形封闭空间的低频声传递函数。通过与模态叠加法进行比较, 验证了该方法的正确性。从结果中发现, 由于在高频部分声场模态数目密集, 因此, 受到计算量与计算精度的限制, 有限元素法不适合求解高频声传递函数。随后, 使用了计算了一个实际意义的车体内腔中任意两点的声传递函数。这为下一步小尺度封闭空间可听化技术的推广使用奠定了很好的基础。

参 考 文 献

- 1 Kleiner K, Dalenback B, Svensson P. *J. Audio Eng. Soc.*, 1993, **41**(11): 816-875.
- 2 Granier E, Kleiner K, Dalenback B, et al. *J. Audio Eng. Soc.*, 1996, **44**(10): 835-849.
- 3 Kuttruff H. *Room Acoustics*, Fourth edition, New York: Spon Press, 2000. 59-88.
- 4 Easwaran V, Craggs A. *J. Sound & Vibration*, 1995, **187**(2): 195-212.
- 5 Petyt M, Lea J, Koopmann G H. *J. Sound & Vibration*, 1976, **45**(4): 495-502.
- 6 杜功焕等. 声学基础. 上海: 上海科学技术出版社, 1986年7月. 197-200.
- 7 Morse P M, Ingard K U. *Theoretical Acoustics*. New York: McGraw-hill Book Company, 1968. 554-576.

(上接第 48 页)

超声波对超滤的强化的研究, 目前仍停留在探索阶段, 一方面, 超声波确可破坏边界层, 减轻浓差极化现象, 因而大大强化超滤过程, 使透过量显著提高; 另一方面, 超声波对膜和高分子溶质本身可能会带来破坏, 因而, 为了获得安全和高效的超声强化超滤方法, 大量的基础性研究工作仍有待进一步开展。

参 考 文 献

- 1 McClements D J. *Trends in Food Sci. & Technol.*, 1995, **6**(9): 293-299.
- 2 Bliz J. *Ultrasonics: Methods and Applications*. London: Butterworth Co. Ltd., 1971, 230-248.
- 3 Ensminger D. *Ultrasonics: Fundamentals, Technology, Applications*, 2nded., Marcel Dekker, New York, 1988, 184-204.
- 4 时钧, 袁权, 高从禧编. 膜技术手册. 北京: 化学工业出版社, 2001. 171-177.
- 5 Tarleton E S, Wakeman R J. *Fil.&Sep.*, 1992, **29** (5): 425-432.
- 6 Maranges C, Fonade C. *J.Membr.Sci.*, 1977, **2**(1): 35-41.

- 7 Najarian S, Bellhouse B J. *J.Membr.Sci.*, 1996, **114** (2): 245-253.
- 8 Finnigam S M, Howell J A. *Chem.Eng.Res.Des.*, 1989, **67** (3): 278-282.
- 9 Cui Z F, Wright K I T. *J.Membr.Sci.*, 1994, **90**(2): 183-189.
- 10 Floros J D, Liang. *Foodtechnol*, 1994, **48**(12): 124-131.
- 11 Muralidhara H S, Senapati N, Ensminger D, et al. *Filtr. Sep.*, 1986, **23**(6): 351-353.
- 12 Felix M P, Ellir A T. *Appl Phys Lett*, 1971, **19** (11): 484-487.
- 13 Simon A, Penpenic L, Gondrexon N, et al. *Ultrasonics Sonochemistry*, 2000, **7**(4): 183-186.
- 14 Simon A, Gondrexon N, Taha S. *Sep.Sci.Technol.*, 2000, **35**(16): 2619-2637.
- 15 Yasuhito Mukai, Eiji Iritani, Toshiro Murase. *Sep.Sci. Technol.*, 1998, **33**(2): 169-185.
- 16 Xijun Chai, Takaomi Kobayashi, Nobuyuki Fujii. *J.Membr. Sci.*, 1998, **148**(1): 129-135.
- 17 Kobayashi T, Chai X, Fujii N. *Sep.Purif.Technol.*, 1999, **17**(1): 31-40.
- 18 Xijun Chai, Takaomi Kobayashi, Nobuyuki Fujii. *Sep.Purif. Technol.*, 1999, **15**(2): 139-146.
- 19 Masselin I, Chasseray X. *J.Membr.Sci.*, 2001, **181** (2): 213-220.