

# 基于超声波测量技术的颗粒尺寸 分布模型的研究

明廷锋<sup>†</sup> 朴甲哲 张永祥

(海军工程大学船舶与动力学院 武汉 430033)

**摘要** 提出了一种利用单颗粒背向散射信号来进行粒径分布估算的超声波测量技术,系统阐述了其理论基础及基本工作原理。被测颗粒的散射信号幅度与它在探测区中的位置、颗粒尺寸和形状有关。通过理论分析,建立了一个可用于描述散射信号幅度概率分布与颗粒系尺寸分布之间关系的数学模型,对该模型的反演计算便可得到颗粒系的尺寸分布信息。为了避免求解过程中的病态系数矩阵问题,将模型求解转化成了易于解决的最优化问题。仿真实例结果验证了该技术的可行性。

**关键词** 超声波, 颗粒测量, 尺寸分布, 优化算法

## A model of particle size distribution based on ultrasonic measuring technology

MING Ting-Feng PIAO Jia-Zhe ZHANG Yong-Xiang

(Architecture & Power Eng. College, Naval University of Engineering, Wuhan 430033)

**Abstract** A new ultrasonic technique is presented, which can be applied to measure the particle size distribution. The method is based on ultrasonic scattering from individual particle. The theory foundation and elementary working principle of the technique are expounded. The amplitude of a received scattering signal depends on the position of the scattering particle in the measurement volume, as well as the dimensions and shape of the particle. A mathematical model which describes the relations between the probability density of the measured amplitudes and the particle size distribution is derived. The particle size distribution is obtained by the numerical inversion of the model. To avoid the ill-conditioned coefficient matrix during the inversion calculating, the mathematical transformation is employed to change the model-solving problem to the optimization problem which is easy to be settled. Simulation result of the model example demonstrates the feasibility of this technique.

**Key words** Ultrasonic wave, Particle measuring, Size distribution, Optimal algorithm

2003-11-04 收稿; 2004-11-17 定稿

作者简介: 明廷锋 (1975-), 男, 武汉人, 海军工程大学船舶与动力学院机械工程系讲师, 博士, 主要从事机械设备状态监测及故障诊断研究。

朴甲哲 (1939-), 男, 教授, 博士生导师。张永祥 (1963-), 男, 教授, 博士生导师。

<sup>†</sup> 通讯联系人 Email: navyiming@hotmail.com

## 1 引言

众所周知,颗粒尺寸及其分布是表征颗粒特性的一个重要指标。在现代工业的生产和科研中,越来越多地涉及到对颗粒的尺寸测量,尤其是对微米级颗粒的测量。据介绍,在化工及医药行业就有约60%的产品呈颗粒状,而其中又有约20%的产品其性能与颗粒粒径有关。关于颗粒尺寸的测量方法目前应用最广泛的是基于Mie理论的光散射测粒技术,已成功研制的仪器如英国Malvern公司的Malvern 2600系列激光颗粒分析仪。其基本原理是根据颗粒物对光的散射现象(例如散射光的角度特性、偏振特征、光强涨落等)来重现颗粒的尺寸分布,显然测粒工作成败的一个关键的问题是怎样由光散射信号反演求得颗粒尺寸分布。国际上许多从事粒度测量工作的学者针对各种不同的光散射测粒原理,发展了多种算法<sup>[1]</sup>。目前,在许多测粒仪中求解这一反命题的常用方法之一是函数限制法,即预先假定实际颗粒系的尺寸分布符合某一函数,一般是单个双参数如正态分布、Rosin-Rammler分布等。因此,该反演计算方法在实用上具有一定的局限性。此外,当被测悬浊液具有不透明性质时,这类光学型颗粒分析仪的作用也将失效。

针对光学型颗粒分析仪中如上所述的两个不足之处,由于超声波在传播过程中具有类似于光束的集束性特征,同时在悬浊液中具有穿透性,不受透明度的影响,本文利用超声波散射信号进行颗粒尺寸分布的测量,设计了一个超声波颗粒测量系统,并建立了颗粒尺寸分布数学模型,该模型可用于各种尺寸分布的被测颗粒系。

## 2 超声波颗粒测量系统的理论基础与工作原理

声波在介质中传播时,碰到物体表面和介质的声学特性不连续时,会产生散射波,其中远场散射对于进行声探测分析物体的特征有重要

的意义。单个刚硬不动微小球形颗粒( $kd/2 \ll 1$ )对平面波散射场的远场( $ks \gg 1$ )声压表达式如式(1)所示<sup>[2]</sup>:

$$p_s \approx -\frac{p_0 \exp(j(\omega t - ks))}{ks} \cdot \frac{(kd)^3}{24} \left(1 - \frac{3}{2} \cos \theta\right) \quad (1)$$

式中:  $p_s$  为远场散射声压;  $k$  为波数;  $d$  为球形颗粒直径;  $s$  为观察点到球形颗粒中心的位移;  $p_0$  为入射平面波声压;  $\omega$  为声波的谐振角频率;  $t$  为时间;  $\theta$  为散射角度。

在背向( $\theta = \pi$ )方向与沿着入射波方向( $\theta = 0$ ),散射声压之比为5倍。可见,小颗粒散射声波具有明显的方向性。

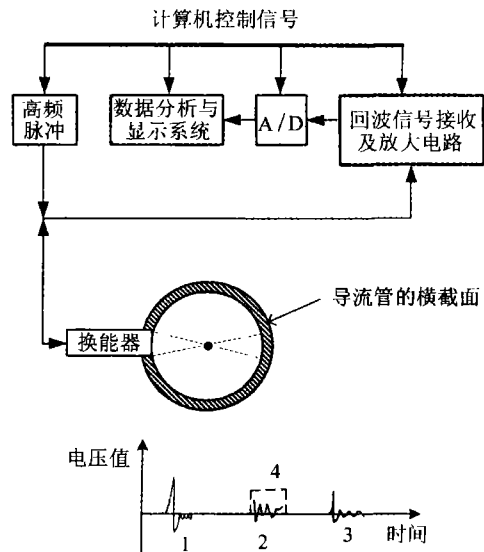


图1 系统的工作原理

- 1 初始脉冲信号 2 颗粒背向散射信号  
3 导流管壁反射信号 4 时间窗

本文的超声波颗粒测量系统正是基于声波的背向散射理论而建立的。系统的基本工作原理如图1所示。为了增强测量声波能量集束性,选用凹球面聚焦自发自收超声波换能器装配在导流管壁的横截面上,将位于导流管的中心附近(如图1中小黑点所示)的聚焦区作为探测区。高频脉冲电路产生电脉冲信号序列,使换能器产生超声波探测信号。通过系统控制,

该换能器在下一个电脉冲到达之前, 可以探测并接收到脉冲回波信号, 经过数据采集板的模数转换 (A/D) 后, 用设计好的程序进行数据处理, 然后显示在屏幕上。回波信号中包括颗粒的背向散射信号 (见图 1 中 “2”) 和管壁的回波信号 (见图 1 中 “3”), 通过调整时间窗范围, 就可以将含有颗粒信息的背向散射信号提取出来。通过统计背向散射脉冲信号的多少, 便可进行颗粒个数统计了; 而信号大小则与颗粒的尺寸有关。

### 3 颗粒尺寸分布估算数学模型

#### 3.1 几点假设

建立基于颗粒回波信号的尺寸分布模型之前, 需要进行如下几点假设 (下面进行的数学模型推导中的参量意义见图 2 所示):

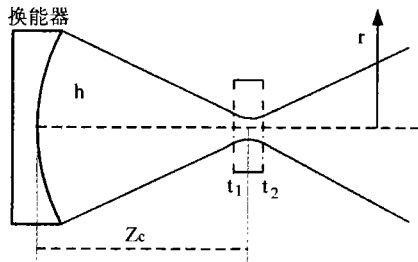


图 2 凹球面超声波换能器示意图

(1) 假设被测颗粒浓度足够低, 以保证在聚焦探测区内的是单个颗粒通过;

(2) 假设颗粒系中的所有颗粒性质一样, 声阻抗差异小; 对于球形颗粒, 当颗粒直径  $d$  与超声波波长  $\lambda$  比较,  $d \ll \lambda$  时 (瑞利散射范围), 测量的峰值  $A_0$  满足:

$$A_0(d) = \alpha_R d^3 \quad (2)$$

式中:  $\alpha_R$  是比例常数, 由各物理参数 (如在介质中的声速、介质密度) 和采集系统的各项性能参数 (如换能器敏感度) 有关, 需进行标定试验来决定。

(3) 定义探测区的径向最大半径  $R_m$  由换能器聚焦区的半径来决定。

$$R_m = \frac{z_c \lambda}{4h} \quad (3)$$

式中:  $z_c$  为聚焦半径,  $h$  为聚焦换能器的半孔径。

定义导流管中的颗粒到声束中心轴的距离为  $r$  (见图 2)。显然, 只有满足  $r \leq R_m$  时, 该颗粒才位于探测区中, 即成为被测量颗粒样本。假设液体中的颗粒服从均匀分布, 则表征被测量颗粒样本位置的特征变量  $r$  服从如下概率密度分布:

$$f_r(r) = \begin{cases} \frac{2r}{R_m^2} & r \leq R_m \\ 0 & r > R_m \end{cases} \quad (4)$$

(4) O'Neil 在文献 [3] 中给出了聚焦超声束在聚点处的声压径向分布函数可表示为:

$$D(r) = \frac{J_1(krh/z_c)}{krh/z_c} \quad (5)$$

式中:  $J_1(\cdot)$  为第一类贝塞尔函数。若只关心聚焦区范围, 则该表达式可以用指数函数来近似表示:

$$D(r) = \exp\left(-\frac{(kh)^2 r^2}{8z_c^2}\right) = \exp(-\eta r^2) \quad (6)$$

因为在进行测量时, 定义测量时间窗 (见图 1 中的 4) 的长度要求窗内的声压在轴向变化小于 1dB, 所以可近似认为在探测区域内的超声波声束幅度沿声轴向是恒定的。处于探测区外的颗粒对聚焦区中的超声波束形状也会有干扰, 但由于其浓度低 (假设 1), 而且粒径较小 (假设 2), 在测量时这些影响是可以被忽略的。

#### 3.2 颗粒尺寸分布的反演计算数学模型

应用式 (2) 和式 (6), 根据声场互易原理, 颗粒的回波信号值理论上可由下式给出:

$$\begin{aligned} A(r, d) &= A_0(d) D^2(r) \\ &= A_0(d) \exp(-2\eta r^2) \end{aligned} \quad (7)$$

显然,  $A(r, d)$  与粒径、换能器性质、和颗粒在测量区中的位置有关。只有当颗粒产生的信号回波值大于测量噪声  $A_n$  (信号阈值) 时, 该颗粒才可认为是被有效监测的。对于某个特定的测量装置, 换能器性质是确定的。虽然颗粒在探测区中的位置不可能事先获知, 但是通过对测量过程的分析可以基本消除该因素的不确定性。运用 3.1 节中的假设 3, 假设颗粒在探测超声波束横截面上均匀分布, 将式 (7) 代入式 (4) 中, 应用概率统计方法, 推导得:

$$g(A|d) = \begin{cases} \frac{1}{2\eta R_m A} & A_0(d) \geq A > A_n \\ 0 & A > A_0(d) \wedge A < A_n \end{cases} \quad (8)$$

式中  $g(A|d)$  是在某个粒径条件下, 信号回波值  $A$  的概率密度函数表达式, 实际上是  $A$  的一个条件概率密度函数。因此, 对于粒径大小服从概率密度函数  $f_d(d)$  的待监测颗粒而言, 其信号回波值的概率密度函数  $f_A(A)$  可通过下式积分式计算得到:

$$f_A(A) = \int_D g(A|d) f_d(d) dd \quad (9)$$

式中:  $D$  为积分的区间, 也即粒径的范围。

从式 (9) 可以看出, 颗粒的回波值  $A$  仅与粒径分布有关, 其在探测区中的位置不确定性这一影响因素已经被消除了。所以, 通过所测量的回波信号值, 求解积分方程 (9) 就可以估算出颗粒的粒径分布。将积分方程用叠加的形式表示:

$$f_A(A_j) = \sum_{i=1}^{N_j} \frac{1}{2\eta R_m A_j} f_d(d_i) \Delta d \quad (10)$$

式 (10) 是在可能产生回波值  $A_j$  的所有不同粒径  $d_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N_j$ ) 的颗粒范围内的叠加计算。粒径在区间  $[d_i - \Delta d/2, d_i + \Delta d/2]$  上的颗粒的粒径分布概率为  $f_d(d_i) \Delta d$ , 定义为  $p_d(d_i)$ 。

因此, 式 (10) 可重写为:

$$f_A(A_j) = \sum_i \frac{1}{2\eta R_m A_j} p_d(d_i) \quad (11)$$

其矩阵形式为:

$$F_A = G(A|d) P_d \quad (12)$$

式 (10)、(11) 和 (12) 即为颗粒粒径分布反演计算数学模型的三种形式。

### 3.3 反演计算数学模型求解方法的确定

建立了颗粒粒径分布反演数学模型, 并确定了模型中的系数参数  $G(A|d)$  后, 下一步的问题便是对矩阵线性方程  $F_A = G(A|d) P_d$  的求解了。在进行的数据处理过程中可知, 参数矩阵  $G(A|d)$  是病态的, 而且方程组因子的不确定, 按照常规的求解线性方程组的方法来求解是无法实现的。但可以将其转化为最优化问题, 利用优化算法, 在先给出一个特定的方程组的解基础上, 进行反复迭代, 直至最优化目标达到, 矩阵线性方程 (12) 也就求解完毕。建立如下目标函数:

$$Y(P_{d1}, P_{d2}, \dots, P_{dN}) = \begin{cases} \|F_A - F'_A\|_2^2 \\ = \sum_{j=1}^M \left( \sum_{i=1}^N \frac{1}{2\eta R_m A_j} P_{di} - F'_{Aj} \right)^2 \\ 1 > P_{d1}, P_{d2}, \dots, P_{dN} \geq 0 \\ \infty \text{ (一个很大的正数)} & \text{其它} \end{cases} \quad (13)$$

式中:  $Y(P_{d1}, P_{d2}, \dots, P_{dN})$  为目标值;  $F_A, F'_A$ , 分别为颗粒回波值概率密度的理论计算值与实测值。

当解向量  $(P_{d1}, P_{d2}, \dots, P_{dN})$  已满足目标值  $Y$  最小并达到精度要求时, 该解向量即为颗粒的粒径分布。所以, 求解就转化为一个无约束的极值求解问题了。数学上解决该问题的优化算法很多<sup>[4]</sup>, 我们采用文献 [5] 中给出了最优化算法。

## 4 模型仿真

为了证明上述模型理论的可行性, 这里给出一个超声波测量颗粒的仿真实例。通过产生随机数来模拟待测液体中颗粒的存在, 包括模

拟颗粒直径和在探测区中所处位置。设模拟的颗粒数为  $2 \times 10^4$  个, 且浓度足够低, 两个或两个以上颗粒出现在探测区的概率很小, 满足 3.1 节中的假设 1。

颗粒均匀分布于液体中 (如式 (4)), 粒径分布既定为服从正态分布, 其中粒径均值为  $15\mu\text{m}$ , 标准方差为  $4\mu\text{m}$ 。信号阈值设定为  $15\text{mV}$ , 比例参数  $\alpha_R = 0.2\text{mV}/\mu\text{m}$ 。通过式 (2) 的计算可知, 能够被有效测量的颗粒直径必须大于  $4.2\mu\text{m}$ 。聚焦超声波换能器的频率为  $5\text{MHz}$ , 式中: 聚焦半径为  $16\text{mm}$ , 半孔径为  $4\text{mm}$ 。

图 3 给出了仿真试验和运用式 (9)(10) 理论计算分别得到的颗粒回波信号幅度概率密度分布情况, 可见仿真试验与理论计算的结果拟和较好, 也说明了文中对超声波测量颗粒的分析是合理的。同时从图中我们可获知, 大信号幅度的出现几率非常小, 出现概率较大的是幅度偏小的信号。这是因为大信号幅度是由粒径相对较大的颗粒在测量时正好位于凹球面聚焦超声波换能器的声轴附近 ( $r \rightarrow 0\text{mm}$ ) 时产生的, 而这种颗粒的数目少; 小幅度回波信号的出现则可以由大量颗粒所产生。

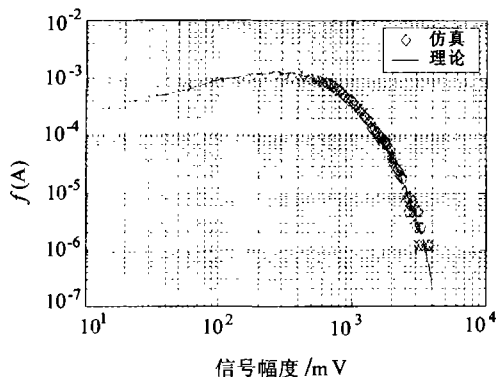


图 3 仿真试验的回波信号幅度的概率密度分布情况 (◇ 符号表示); 在所设定的粒径尺寸分布的基础上, 理论计算的回波信号幅度概率分布情况 (实线表示)

根据第 3 节中推导的颗粒粒径分布模型 (式 (10)~(11)), 由颗粒的回波信号幅度概率密

度分布反演计算可得到被测颗粒粒径分布情况 (见图 4)。通过与仿真试验所设的实际颗粒粒径分布比较可知, 结果相当吻合。

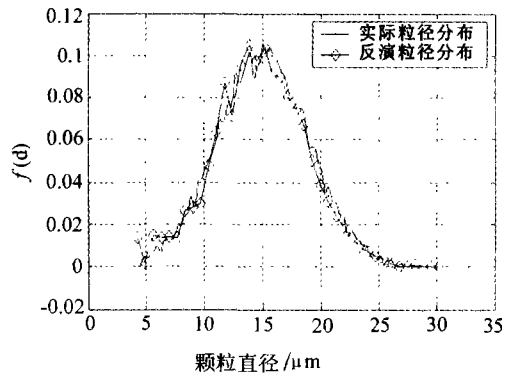


图 4 仿真试验中设定的颗粒粒径分布 (实线表示); 运用粒径分布估算模型反演计算的结果 (符号表示)

## 5 结论

(1) 所提出的基于超声波背向散射的颗粒尺寸分布测量方法的理论基础和工作原理是可靠的。

(2) 与光学型粒度分析方法不同, 所建立的颗粒尺寸分布反演计算数学模型可用于各种尺寸分布模型的被测颗粒系, 在求解时不需要进行任何粒子尺寸分布函数假设限制, 采用数学上的优化算法可以求解该模型。

(3) 对于更加复杂的测量情况, 例如探测区出现超过一个颗粒, 或者悬浊液中存在不同类型的颗粒, 还需要进一步深入研究, 以完善本文所建立数学模型。

## 参 考 文 献

- 1 Lesnic D, Elliott L. *J. Aerosol Sci.*, 1996, **27**(7): 1063~1082.
- 2 何祚镛, 赵玉芳. 声学理论基础. 北京: 国防工业出版社, 1981. 319~321.
- 3 O'Neil H T. *J. Acoustic. Soc. Am.*, 1949, **21**(5): 516~526.
- 4 陈宝林. 最优化理论与算法. 北京: 清华大学出版社, 2002. 397~431.
- 5 Coleman T F, Li Y. *SIAM Journal on Optimization*, 1996, **6**(4): 1040~1058.