

任意边界板结构的声辐射模态 误差传感器的设计*

朱利锋 姜哲†

(江苏大学噪声振动研究所 江苏镇江 212013)

摘要 获取声辐射模态伴随系数是基于声辐射模态理论进行主动结构声控制 (ASAC) 的重要环节。以往 PVDF 分布式传感器的设计难点是振速展开受边界条件的限制, 其设计过程往往是针对特定边界条件展开的。本文在声辐射模态理论和二维分布式传感器的压电方程的基础上, 将板表面振速分布用 Legendre 多项式展开, 给出了两维板结构的 PVDF 传感器形状与边界条件无关的设计方法。这样设计得到的传感器能应用于任意边界条件和任意振速分布的两维板结构, 且实时性好, 拓宽了其应用范围。本文还分别以固定边界条件板及在该板中任取一小区域两种情况为例, 证明了该设计方法的可行性。

关键词 声辐射模态, 任意边界条件, 伴随系数, 振动结构, 误差传感器

Design of a radiation-mode error sensor for plate with arbitrary boundary condition

ZHU Li-Feng JIANG Zhe

(Institute of Vibration and Noise Jiangsu University, Jiangsu Zhengjiang 212013)

Abstract To obtain the adjoint coefficients of the radiation modes is an important step in ASAC system which is based on the theory of radiation modes. Previous difficulty in designing PVDF sensors was that the velocity expression is restricted by the boundary conditions, and that the sensors were designed under the special boundary conditions. This paper presents a new method, which is based on the theories of radiation modes and the piezoelectric equations, using Legendre polynomials to express the velocity distribution, to design the PVDF sensor for two-dimensional structure. The PVDF sensor designed by this method can be used to measure the adjoint coefficients of radiation modes for two-dimensional plate structures with arbitrary boundary conditions, and has good real-time quality. For either a clamped plate or part of a clamped plate, the first

2006-09-01 收稿; 2008-01-02 定稿

* 国家自然科学基金资助项目 (50475120)

作者简介: 朱利锋 (1982-), 男, 浙江上虞人, 江苏大学硕士生。

姜哲 (1954-), 男, 教授, 博士生导师。

† 通讯联系人 E-mail: zhe@ujs.edu.cn

adjoint coefficients of radiation modes can be measured. By numerical calculation, the outputs of the PVDF sensor are compared with the theoretical values, and the results demonstrate the feasibility of this method.

Key words Radiation mode, Arbitrary boundary condition, Adjoint coefficient, Vibration structure, Error sensor

1 引言

基于声辐射模态理论对振动结构进行主动结构声控制 (Active Structural Acoustic Control, ASAC) 是通过改变振动结构振速分布使辐射声功率最小化, 实现中低频噪声控制的有效方法。自上世纪 80 年代发展至今, 已有众多国内外学者对此做了研究讨论^[1-4]。根据声辐射模态理论, 中低频时, 第一阶声辐射模态对应的辐射声功率占总声功率的 90% 以上, 于是使第一阶声辐射模态伴随系数最小化就能大幅度降低结构的噪声辐射。因此, 对振动结构进行 ASAC 的关键之一是如何能准确地测得结构的第一阶声辐射模态伴随系数, 即如何设计误差传感器。

用聚偏氟乙烯 (Polyvinylidene fluoride, PVDF) 设计的误差传感器测量声辐射模态伴随系数在两维简支板结构上已经得到了成功的应用^[4]。但由于这种误差传感器在设计时, 板的振速分布和 PVDF 薄膜形状函数都是用简支板结构模态函数 (正弦函数) 展开, 结构模态在板的边界上值等于零, 因此它只能应用于边界位移为零的振动结构中。然而, 实际应用中感兴趣的是局部振动噪声控制, 因此需要测量振动板中局部区域的第一阶声辐射模态伴随系数, 由于该区域的边界条件随板的振动而变化, 不能用之前设计的传感器来测量, 因此, 设计一种能应用于任意边界条件板结构的分布式传感器对 ASAC 意义深远。根据板梁的声辐射模态理论, 各阶声辐射模态是与边界条件无关的^[5], 即只要振动结构几何外形和振动频率不变, 其声辐射模态的形状也是不变的, 因此, 设计这样的传感器在理论上是有基础的。有学者研究了使传感器与边界条件无关的设计方法^[6], 如利

用 PVDF 传感器阵列, 通过对每一个传感器的输出加权, 使加权后的总电荷量为结构的第一阶声辐射模态伴随系数; 基于板表面有限点振速测量来获取第一阶声辐射模态伴随系数等, 但以上两种方法必须对传感器输出信号进行计算处理才能得结果, 这增加了信号处理时间, 实时性差。

本文旨在寻求新的分布式误差传感器设计方法, 使其能测量任意边界条件下两维板结构的声辐射模态伴随系数, 并且满足实时性要求。其设计原理为, 基于声辐射模态及其改进理论和两维分布式传感器压电方程, 将结构振动速度和 PVDF 形状同时用 Legendre 多项式展开, 使设计的 PVDF 误差传感器不受边界条件限制, 通过仿真验算证明了该设计方法的可行性。

2 PVDF 传感器形状设计

任何连续函数都能用 Legendre 正交多项式展开, 因为 Legendre 多项式是定义在 $[-1, 1]$ 上, 故作以下由 (x, y) 向 (X, Y) 的坐标变换:

$$X = \frac{2x - L_x}{L_x}, \quad Y = \frac{2y - L_y}{L_y}$$

其中

$$\begin{cases} x \in [0, L_x] \\ y \in [0, L_y] \end{cases} \quad (1)$$

式中: L_x 和 L_y 分别表示板的长度和宽度。则对一般任意边界条件板结构, 其表面法向振速 $V(X, Y)$ 可近似表示为^[7]:

$$V(X, Y) \approx V_x(X) V_y(Y) \quad (2)$$

其中, $V_x(X)$ 和 $V_y(Y)$ 都是 $[-1, 1]$ 上的连续函数, 可采用 Legendre 多项式展开:

$$V_x(X) = \sum_{s=0}^S c_s P_s(X), V_y(Y) = \sum_{k=0}^K d_k P_k(Y) \quad (3)$$

式中 X, Y 为变换后的坐标, c_s 和 d_k 分别为 $V_x(X)$ 和 $V_y(Y)$ 的展开系数, S 和 K 为展开项数. 第 i 项 Legendre 多项式表示为 $P_i(X) = \frac{1}{i! \cdot 2^i} \frac{d^i}{dX^i} [(X^2 - 1)^i]$. Legendre 多项式是空间一组基函数, 任意连续函数都能用 Legendre 多项式线性表示. 因此, 将式 (3) 代入式 (2) 后可表示任意边界条件下板的振速分布.

二维分布式传感器的电荷输出方程可表示为 [8]:

$$q = -\frac{z}{i\omega} \cdot \frac{L_x}{2} \cdot \frac{L_y}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 F(X, Y) \left(e_{31} \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + e_{32} \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right) dX dY \quad (4)$$

式中: $z = \frac{h_f + h}{2}$, h_f 为 PVDF 的厚度, h 为板的厚度, $F(X, Y)$ 是 PVDF 的形状函数, e_{31} 和 e_{32} 是 PVDF 的压电常数.

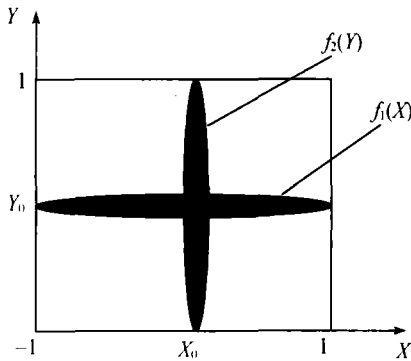


图 1 PVDF 粘贴位置示意图

现在假设在板的 X 和 Y 方向各布置一条 PVDF 压电薄膜, 其中心线分别位于 $Y = Y_0$ 和 $X = X_0$ 处, PVDF 形状关于中心线对称, 如图 1 所示. 假设每条 PVDF 的最大宽度远远小于板的长度和宽度, X 和 Y 方向的 PVDF

薄膜宽度分别为 $2\mu_x f_1(X)$ 和 $2\mu_y f_2(Y)$, 这里 μ_x 和 μ_y 是用来控制 PVDF 宽度的待定系数, 并且认为它们远远小于 1. 因此可以认为两条 PVDF 是相互独立的, 互不影响, 则它们的输出电荷量可以近似表示为:

$$q \approx q_x + q_y \quad (5)$$

式中:

$$q_x = -\frac{z}{i\omega} \cdot \frac{S'}{4} \int_{-1}^1 \int_{Y_0 - \mu_x f_1(X)}^{Y_0 + \mu_x f_1(X)} \left(e_{31} \frac{\partial^2 V(X, Y)}{\partial X^2} + e_{32} \frac{\partial^2 V(X, Y)}{\partial Y^2} \right) dX dY \quad (6)$$

$$q_y = -\frac{z}{i\omega} \cdot \frac{S'}{4} \int_{-1}^1 \int_{X_0 - \mu_y f_2(Y)}^{X_0 + \mu_y f_2(Y)} \left(e_{31} \frac{\partial^2 V(X, Y)}{\partial X^2} + e_{32} \frac{\partial^2 V(X, Y)}{\partial Y^2} \right) dX dY \quad (7)$$

式中 S' 为板的表面积, 将式 (2) 代入 (6) 式可得:

$$q_x = -\frac{z}{i\omega} \cdot \frac{S'}{4} \int_{-1}^1 \int_{Y_0 - \mu_x f_1(X)}^{Y_0 + \mu_x f_1(X)} e_{31} V_y(Y) \frac{\partial^2 V_x(X)}{\partial X^2} dX dY - \frac{z}{i\omega} \cdot \frac{S'}{4} \int_{-1}^1 \int_{Y_0 - \mu_x f_1(X)}^{Y_0 + \mu_x f_1(X)} e_{32} V_x(X) \frac{\partial^2 V_y(Y)}{\partial Y^2} dX dY \quad (8)$$

将式 (3) 代入上式得:

$$q_x = -\frac{z}{i\omega} \cdot \frac{S'}{4} \int_{-1}^1 e_{31} \sum_{s=0}^S c_s P_s''(X) \int_{Y_0 - \mu_x f_1(X)}^{Y_0 + \mu_x f_1(X)} \sum_{k=0}^K d_k P_k(Y) dY dX - \frac{z}{i\omega} \cdot \frac{S'}{4} \int_{-1}^1 e_{31} \sum_{s=0}^S c_s P_s(X) \int_{Y_0 - \mu_x f_1(X)}^{Y_0 + \mu_x f_1(X)} \sum_{k=0}^K d_k P_k''(Y) dY dX \quad (9)$$

其中上标 $''$ 表示对函数求两次导数, 因为 $\mu_x f_1(X) \ll 1$, 故式 (9) 可以近似简化为:

$$q_x = -\frac{z}{i\omega} \cdot \frac{S'}{4} \cdot e_{31} \int_{-1}^1 \sum_{s=0}^S c_s P_s''(X) \sum_{k=0}^K d_k P_k(Y_0) \cdot 2\mu_x f_1(X) dX$$

$$-\frac{z}{i\omega} \cdot \frac{S'}{4} \cdot e_{32} \int_{-1}^1 \sum_{s=0}^S c_s P_s(X) \sum_{k=0}^K d_k P_k''(Y_0) \cdot 2\mu_x f_1(X) dX \quad (10)$$

PVDF 薄膜的形状函数 $f_1(X)$ 也用 Legendre 多项式展开, 即

$$f_1(X) = \sum_{g=0}^G \phi_g P_g(X) \quad (11)$$

代入式 (10) 得:

$$q_x = -\frac{z}{i\omega} \cdot \frac{S'}{4} \cdot e_{31} \cdot 2\mu_x \sum_{k=0}^K d_k P_k(Y_0) \int_{-1}^1 \sum_{s=0}^S c_s P_s''(X) \sum_{g=0}^G \phi_g P_g(X) dX$$

$$-\frac{z}{i\omega} \cdot \frac{S'}{4} \cdot e_{32} \cdot 2\mu_x \sum_{k=0}^K d_k P_k''(Y_0) \int_{-1}^1 \sum_{s=0}^S c_s P_s(X) \sum_{g=0}^G \phi_g P_g(X) dX$$

$$= -\frac{z}{i\omega} \cdot \frac{S'}{4} \cdot 2\mu_x \sum_{g=0}^G \phi_g \sum_{k=0}^K \sum_{s=0}^S d_k c_s \left(e_{31} P_k(Y_0) \int_{-1}^1 P_s''(X) P_g(X) dX \right.$$

$$\left. + e_{32} P_k''(Y_0) \int_{-1}^1 P_s(X) P_g(X) dX \right) \quad (12)$$

将上式写成矩阵形式得:

$$q_x = \phi^T \cdot \mathbf{T1} \cdot \mathbf{C} \quad (13)$$

式中 ϕ 是由 $f_1(X)$ 展开系数组成的 $G \times 1$ 列

向量, G 为 $f_1(X)$ 的展开项数, \mathbf{C} 是由元素 $C_{sk} = c_s \cdot d_k$ 组成的 $(S \times K) \times 1$ 阶列向量, 矩阵 $\mathbf{T1}$ 的第 $(g, (s \times k))$ 个元素为:

$$T1_{g,sk} = \frac{z}{i\omega} \cdot \frac{S'}{4} \cdot 2\mu_x \left(e_{31} P_k(Y_0) \int_{-1}^1 P_s''(X) P_g(X) dX + e_{32} P_k''(Y_0) \int_{-1}^1 P_s(X) P_g(X) dX \right) \quad (14)$$

注意上式第一个积分式中, 当 $s = g + 2$ 时, $P_s''(X)$ 与 $P_g(X)$ 存在正交性。

同理, 对于 (7) 式, 将式 (2) 和 (3) 代入, 经过类似的推导, 可得:

$$q_y = \psi^T \cdot \mathbf{T2} \cdot \mathbf{C} \quad (15)$$

式中: ψ 是 $f_2(Y)$ 的展开系数组成的 $R \times 1$ 列向量, R 为 $f_2(Y)$ 的展开项数, 矩阵 $\mathbf{T2}$ 的第 $(r, (s \times k))$ 元素为:

$$T2_{r,sk} = -\frac{z}{i\omega} \cdot \frac{S'}{4} \cdot 2\mu_y \left(e_{31} P_s''(X_0) \int_{-1}^1 P_k(Y) \right.$$

$$\left. P_r(Y) dY + e_{32} P_s(X_0) \int_{-1}^1 P_k''(Y) P_r(Y) dY \right) \quad (16)$$

注意上式第二个积分式中, 当 $k = r + 2$ 时,

$P_k''(Y)$ 与 $P_r(Y)$ 存在正交性。

第一阶声辐射模态伴随系数可以表示为

$$\eta_1 = \iint_s Q_1(x, y) \cdot V(x, y) dS \quad (17)$$

其中 $Q_1(x, y)$ 为第一阶声辐射模态^[4], 对上式坐标变换, 并将式 (2) 和 (3) 代入, 得:

$$\eta_1 = \frac{S'}{4} \cdot \sum_{s=0}^S \sum_{k=0}^K c_s d_k \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 Q_1(X, Y) P_s(X) P_k(Y) dX dY \quad (18)$$

将上式也写成矩阵形式得:

$$\eta_1 = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{C} \quad (19)$$

式中: 矩阵 \mathbf{B} 为 $(S \times K)$ 维列向量, 其第 $(s \times k)$

个元素为:

$$B_{sk} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 Q_1(X, Y) P_s(X) P_k(Y) dXdY \quad (20)$$

令 PVDF 压电薄膜的输出电荷量等于振动结构的第一阶声辐射模态伴随系数,

$$q_x + q_y = \eta_1 \quad (21)$$

即

$$\phi^T \cdot \mathbf{T1} \cdot \mathbf{C} + \psi^T \cdot \mathbf{T2} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{C} \quad (22)$$

对任意 \mathbf{C} 成立, 则可得:

$$\phi^T \cdot \mathbf{T1} + \psi^T \cdot \mathbf{T2} = \mathbf{B}^T \quad (23)$$

等式 (23) 表示的线性方程组中有未知数 $G + R$ 个, 要使方程组有唯一解, 则必须满足 $G + R \leq S \times K$, 其中 S, K 为表面法向振速的展开项数。此时, 只要再确定两条 PVDF 薄膜在 X 和 Y 方向上的位置 X_0 和 Y_0 , 以及速度的展开项数 S 和 K , 就能得到 PVDF 形状函数的展开系数 ϕ_g 和 φ_r 。同时注意, 当 G, R, S, K 取得越大时, 得到的 PVDF 形状也越复杂, 这对实际应用不利, 针对这种情况, 可以考虑在 X 和 Y 方向上同时布置多条 PVDF 压电薄膜。

3 数值分析

以图 2 所示的矩形板为例, 长 $L_x = 0.3\text{m}$, 宽 $L_y = 0.3\text{m}$, 板厚 $h = 0.002\text{m}$, 弹性模量 $E =$

$2 \times 10^{11}\text{N/m}^2$, 板的密度 $\rho = 7.8 \times 10^3\text{kg/m}^3$, 泊松比 $\nu = 0.3$, 模态阻尼系数为 0.001 。

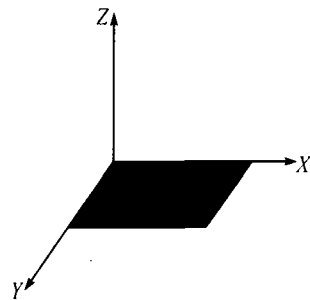


图 2 矩形板坐标示意图

以固定边界条件的板为例, 其固有频率和振速分布的计算方法参见文献 [9], 表 1 列出了固定边界条件下板的前九阶固有频率。

表 1 固定边界条件的板的固有频率 (Hz)

阶数	1	2	3
1	195.7	399.6	718
2	399.6	589.9	899.2
3	718	899.2	1197.2

根据上述方法, 由于展开项数越多, PVDF 传感器形状越复杂。在中低频范围, 形状函数和板的法向振速的展开项数可以较小, 这里以取 $G = R = S = K = 3$ 为例, 在板的中心线位置为 $X_0 = 0$ 和 $Y_0 = 0$ 设计 PVDF 传感器, 如图 3 中的曲线部分所示 (曲线表示传感器的边

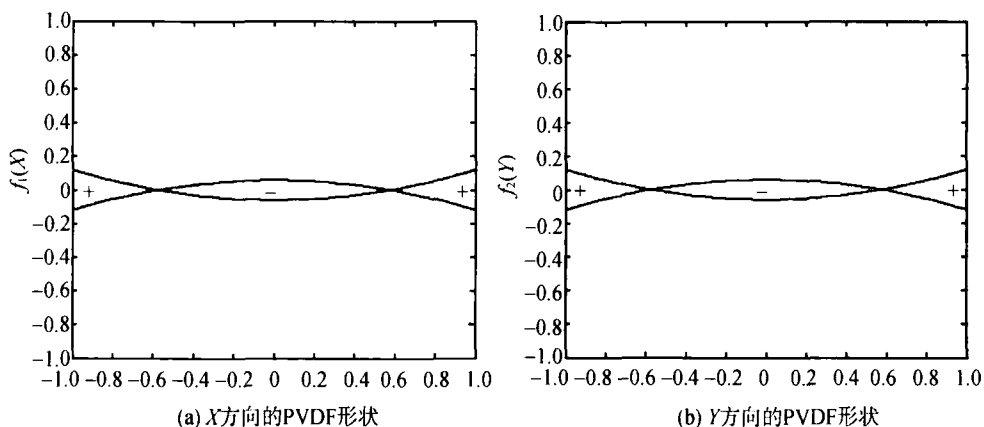


图 3 X, Y 方向上的 PVDF 形状及其在板上的布置示意图

界), 图中的 '+' 和 '-' 号分别表示 PVDF 的正负极。

假设单位激励力位置在板的中心点, 即 $(0.5L_x, 0.5L_y)$ 时, 将根据式 (17) 得到的固定边界条件板的理论第一阶声辐射模态伴随系数与图 3 所示的 PVDF 传感器的输出电荷量进行比较 (为分析方便, 对结果均采用了无量纲化处理, 下同), 如图 4 所示。改变单位激励力位置至点 $(0.35L_x, 0.25L_y)$ 处, 结果如图 5 所示。

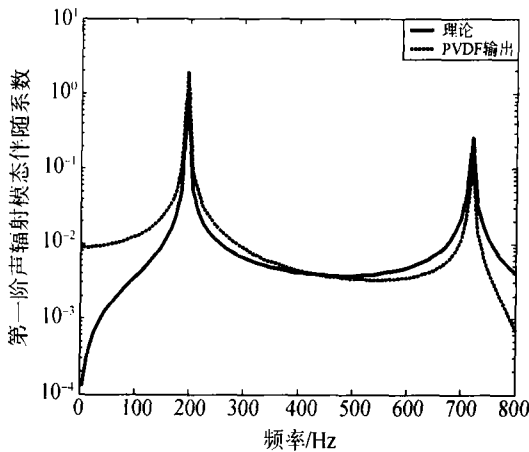


图 4 激励力位置 $(0.5L_x, 0.5L_y)$

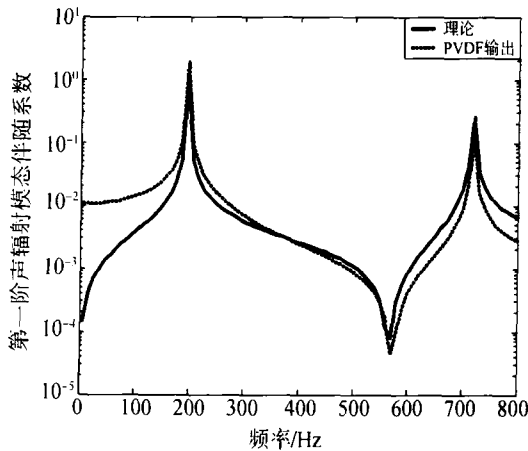


图 5 激励力位置 $(0.35L_x, 0.25L_y)$

从图中可以看出, 在中低频范围, 无论激励力位置在板的中心点还是板的任意位置时, 固定边界条件下 PVDF 传感器的输出电荷曲线与理论的第一阶声辐射模态伴随系数曲线都吻合得较好, 尤其是在 200Hz 至 750Hz 频率段, 更是

基本一致, 当频率逐渐增大时, PVDF 输出略小于第一阶伴随系数的理论值。

进一步讨论如图 3 所示的传感器适合任意边界条件。将设计的 PVDF 传感器贴于固定边界条件的板的左下方四分之一处, 如图 6 所示, 激励力仍位于板正中间。传感器测得的该四分之一部分的第一阶声辐射模态伴随系数与理论值的比较如图 7 所示, 两曲线吻合相当好。设计得到的 PVDF 传感器可用于振动表面局部声辐射模态伴随系数测量, 拓宽了应用范围。

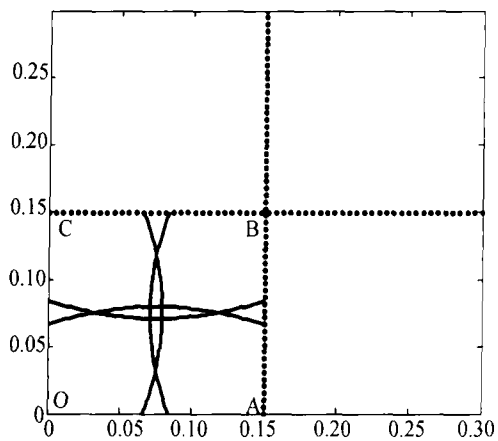


图 6 PVDF 传感器在固定板上部分分布

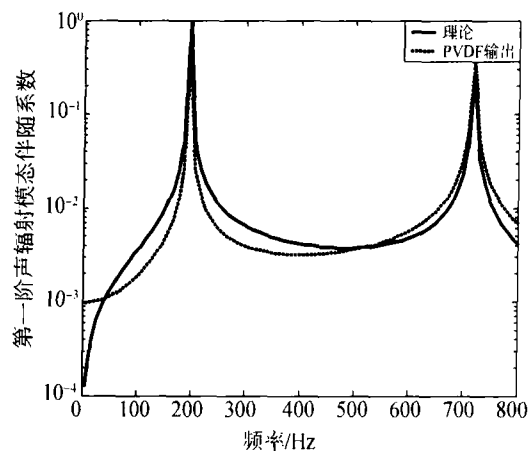


图 7 固定板左下方部分第一阶伴随系数

4 结论

本文以声辐射模态理论和二维分布式传感器压电方程为基础, 通过将振动结构法向振速

和 PVDF 形状函数均用 Legendre 正交多项式展开, 设计了适合测量中低频时, 任意边界条件时两维板结构的声辐射模态伴随系数的 PVDF 模态传感器。在设计过程中, 考虑到测量频率范围较小, 取的展开项数较小, 得到形状比较简单的 PVDF 传感器。通过分别在固定边界条件板和在该板上任取一小区域两种情况下验算板的第一阶声辐射模态伴随系数, 得到了较好的测量效果, 证明利用该设计方法设计得到的 PVDF 传感器确实适用于任意边界条件。这不仅拓宽了 PVDF 传感器的应用范围, 而且能保证传感器的实时性。

参 考 文 献

- [1] S. J. Elliott and M.E.Johnson. Radiation modes and the active control of sound power. *J. Acoust. Soc. Am*, 94(4), October 1993: 2194-2203.
- [2] F.Charette,A.Berry and C.Guigou. Active control of sound radiation from a plate using a polyvinylidene fluoride volume displacement sensor. *J. Acoust. Soc. Am*, 103(3), March 1998: 1493-1503.
- [3] 毛崎波. 声辐射模态以及结构声辐射有源控制(ASAC)的研究. 江苏理工大学博士论文, 2001.
- [4] 吴锦武, 姜哲, 毛崎波. 利用 PVDF 设计两维简支结构的声辐射模态传感器. *江苏大学学报(自然科学版)*, 2002, 23(6): 15-20.
- [5] 顾俭, 姜哲. 任意边界梁的声辐射模态伴随系数测量. *振动工报*. 2004, 17(1): 86-90.
- [6] 吴锦武. 基于声辐射模态有源结构声学控制 (ASAC) 的误差传感策略研究. 江苏大学博士论文. 2006.
- [7] 曹志远编著. 板壳振动理论. 北京: 中国铁道出版社, 1989: 49-54.
- [8] C.K.Lee and F.C.Moon. Modal Sensors /Actuators. *ASME Trans. J. Vibration and Acoustics*. June 1990, 57: 434-441.
- [9] C.-C.Sung and J.T.Jan. THE RESPONSE OF AND SOUND POWER RADIATED BY A CLAMPED RECTANGULAR PLATE. *Journal of Sound and Vibration*. 1997, 207(3): 301-317.