

# 基于波数积分的水声传播建模实现方法研究

姚万军<sup>†</sup>

(海军工程大学电子工程学院 武汉 430033)

**摘要** 研究了基于波数积分的水声传播建模数值实现方法,利用局部系数矩阵的映射,建立了全局系数矩阵,分析了保持数值稳定性的方法。用FFP方法实现了数值积分,并讨论了实现过程中的一些细节。结合仿真实例与基于简正波的模型KrakenC和Kraken的计算结果进行了比较分析。结果表明,波数积分方法在近场计算时更为准确,同时还具有容易扩展到复数域计算衰减的问题、容易求解粘弹性介质中声场的特点。

**关键词** 水声传播建模,波数积分,FFP

## An approach to underwater acoustic propagation modeling based on wave-number integration technique

YAO Wan-Jun

(Electronics Engineering College, Naval Univ. of Engineering, Wuhan 430033)

**Abstract** A study of the numerical realization of underwater acoustic propagation modeling is made based on wave-number integration. The global coefficient matrix is set up through the mapping of local coefficient matrixes. Measures to maintain the numerical stability are studied. FFP technique is used for the numerical evaluation of the integral with some details. The transmission loss calculated by this method is compared with those given by KrakenC and Kraken based on normal mode theory with an example. It shows that the results given by wave-number integration are more accurate. At the same time, this method is easy to extend to calculate attenuation in complex domain, and can be used to calculate Transmission loss in elastic mediums too.

**Key words** Underwater acoustic propagation modeling, Wave-number integration, FFP

2007-01-04 收稿; 2007-05-25 定稿

作者简介:姚万军(1978-),男,湖北公安人,博士生,研究方向:水声建模与仿真。

<sup>†</sup> 通信联系人 E-mail: ywj2337@21cn.com

## 1 引言

作为水声场噪声和混响建模的基础,水声传播建模在整个水声建模的理论体系中处于一个非常基础也非常重要的位置。目前已有的主要理论方法包括:射线理论、简正波理论、波数积分方法、抛物方程法、有限元方法等<sup>[1]</sup>。各种方法各有其特点和适用环境。射线方法基于波动方程的高频近似解,其物理意义明显,计算速度快,但对低频以及焦散区处理困难。简正波理论是研究得比较多而且应用也比较广的一种方法,也存在不少应用广泛的计算机程序,如 KRKNEN、COUPLE 和 MOATL 等。其基本原理是把积分拓展到复平面,应用柯西原理通过计算围道内的留数来计算原积分。一般在处理时忽略了分支线积分,所以简正波理论在较近距离上存在较大误差,但一定距离之外精度较高,且耦合简正波理论还适合处理水平变化的海洋环境。抛物方程法基于波动方程的窄角近似解,但已有了可以处理宽角和后向散射等问题的算法。在处理距离相关的问题上,它是应用最为广泛的一种方法。不过它对于高频和大海深的环境计算效率不是很高,而且其解的直观物理意义也不是很明显。有限元方法的计算精度高,但它是一种基于空间剖分的算法,在声场范围比较大时计算速度慢,因此它主要用于和其他方法结合起来,解决一些局部问题。

波数积分方法与简正波方法的主要区别在于积分处理方法上的不同。波数积分采用的是直接数值积分的方法,因而其对近场的计算更为准确,同时也易于处理衰减的问题,且能计算粘弹性介质中的声场。而其数值积分又可以通过快速傅立叶变换来实现,因此一般也把该方法称为快速场程序(FFP)。因为它处理的基础是对波动方程实施积分变换,因此它一般用于处理与距离无关的环境。也有一些把它扩展来处理距离相关环境的研究<sup>[2-4]</sup>,但都存在一定的局限性。Henrik Schmidt 等则

综合利用了波数积分、有限元和边界积分等方法,通过剖分距离,形成“超元”的方法来处理水平相关的环境<sup>[5]</sup>。下面在简要给出波数积分理论公式的基础上,重点讨论了其数值实现方法,强调了数值实现过程中的重点,提出了一些提高计算效率以及稳定性的方法,并给出了仿真实例。

## 2 波数积分方法基本理论<sup>[1]</sup>

考虑一深度相关轴对称环境下强度为  $S_0$  的谐和点源 ( $\exp(-i\omega t)$ ),引入柱坐标系  $(r, \varphi, z)$ ,其中  $z$  轴向下,置声源于  $z$  轴上,因此声场与方位角  $\varphi$  无关。则位移势  $\psi(r, z)$  满足下面的亥姆霍兹方程:

$$[\Delta^2 + k^2(z)]\psi(r, z) = S_0\delta(z - z_s)\delta(r)/(2\pi r) \quad (1)$$

其中  $z_s$  为声源深度,  $k(z) = \omega/c(z)$  为波数,  $c(z)$  为深度  $z$  处声速,  $\omega = 2\pi f$  为角频率。对(1)实施 Hankel 变换,得到如下的深度相关波动方程:

$$\{d^2/dz^2 + [k^2(z) - k_r^2]\}\psi(k_r, z) = S_0\delta(z - z_s)/2\pi \quad (2)$$

该方程的解由一个特解 ( $\hat{\psi}(k_r, z)$ ) 与对应的齐次方程的解 ( $\psi^-(k_r, z)$  和  $\psi^+(k_r, z)$ ) 的和构成,即:

$$\psi(k_r, z) = \hat{\psi}(k_r, z) + A^-(k_r)\psi^-(k_r, z) + A^+(k_r)\psi^+(k_r, z) \quad (3)$$

其中  $A^-$  和  $A^+$  为未知系数,由边界条件决定。特解一般选择为无限空间中该点源所产生的声场,即  $\hat{\psi}(k_r, z) = S_0\exp(ik_r|z - z_s|)/(4\pi ik_r)$ ;其中  $k_z$  取:

$$k_z = \sqrt{k^2 - k_r^2} \quad |k| \geq |k_r|$$

$$k_z = i\sqrt{k_r^2 - k^2} \quad |k| < |k_r|$$

(2)式的解也称为深度相关格林函数。对其实施反 Hankel 变换,就得到声场的积分表达式:

$$\psi(r, z) = \int_0^{\infty} \psi(k, z) J_0(k, r) k, dk, \quad (4)$$

其中  $J_0(k, r)$  为第零阶 Bessel 函数, (4) 式中被积函数  $J_0(k, r) k$ , 外的部分  $\psi(k, z)$  是  $\psi(r, z)$  相应的波数积分核函数。

### 3 数值计算方法

从上面的推导可知, 要得到  $\psi(r, z)$ , 主要有两步: 一是深度相关格林函数的计算, 二是 (4) 式的积分计算。对于第一步一般也有两种方法。第一种是直接采用数值方法解 (2) 式的深度相关波动方程, 例如有限差分方法 (FD), 这也正是简正波所采用的方法之一。但基于计算效率的考虑, 波数积分方法往往采用了将海洋环境水平分层, 每层中的声速梯度满足特殊的函数形式, 以得到层中格林函数解析解的方法<sup>[1]</sup>。而 (4) 式的积分计算也有多种方法, 例如 FFP, 梯形法则以及其他一些数值积分方法等。

#### 3.1 深度相关格林函数的计算

这里以每层等声速分布为例进行说明, 从而第  $m$  层中易解得格林函数为:

$$\psi(k, z) = S_{\omega} \exp(ik_z |z - z_s|) / 4\pi ik_z + A^- \exp(-ik_z z) + A^+ \exp(ik_z z) \quad (5)$$

设  $w(r, z)$  和  $\sigma_{zz}$  分别为界面处垂直位移分量以及法向压力, 根据它们与位移势的关系, 易得  $w(r, z) = \partial\psi(r, z) / \partial z$ ,  $\sigma_{zz} = -\rho\omega^2\psi(r, z)$ 。由此求得垂直位移积分核  $w(k, z)$  和法向压力积分核  $\sigma_{zz}(k, z)$  分别为:

$$w(k, z) = -ik_z A^- \exp(-ik_z z) + ik_z A^+ \exp(ik_z z) \quad (6a)$$

$$\sigma_{zz}(k, z) = -\rho\omega [A^- \exp(-ik_z z) + A^+ \exp(ik_z z)] \quad (6b)$$

声源的贡献积分核为:

$$\begin{aligned} \hat{w}(k, z) &= (S_{\omega} / (4\pi)) \cdot \text{sign}(z - z_s) \exp(ik_z |z - z_s|) \\ & \quad (7a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{zz}(k, z) &= -S_{\omega} \rho (2\pi f)^2 \exp(ik_z |z - z_s|) / 4\pi ik_z \quad (7b) \end{aligned}$$

对于弹性介质而言, 只是在压缩波的基础上多了切变波, 相应地也多了切向位移  $u(r, z)$  和切向压力  $\sigma_{rz}(r, z)$ 。其积分核计算式如下<sup>[1,7]</sup>:

$$\begin{aligned} w(k, z) &= -ik_z A^- \exp(-ik_z z) + ik_z A^+ \exp(ik_z z) + k B^- \exp(-ik_z z) \\ & \quad + k B^+ \exp(ik_z z) \quad (8a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u(k, z) &= -k A^- \exp(-ik_z z) - k A^+ \exp(ik_z z) + ik_z B^- \exp(-ik_z z) \\ & \quad - ik_z B^+ \exp(ik_z z) \quad (8b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}(k, z) &= \mu \{ (2k_r^2 - \kappa_m^2) [A^- \exp(-ik_z z) + A^+ \exp(ik_z z)] - 2ik_z \kappa_z [B^- \exp(-ik_z z) - B^+ \exp(ik_z z)] \} \\ & \quad (8c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{rz}(k, z) &= \mu \{ (2ik_z \kappa_z [A^- \exp(-ik_z z) - A^+ \exp(ik_z z)] - (2k_r^2 - \kappa_m^2) [B^- \exp(-ik_z z) + B^+ \exp(ik_z z)] \} \\ & \quad (8d) \end{aligned}$$

其中压缩波数  $c_p = \sqrt{(\lambda + 2\mu) / \rho}$ , 切变波数  $c_s = \sqrt{\mu / \rho}$ ,  $\lambda$  和  $\mu$  为由介质物理属性决定的两个常量,  $\rho$  为介质密度。  $\kappa_m = 2\pi f / c_p$ ,  $\kappa_z = 2\pi f / c_s$ , 分别为压缩波数和切变波数。对于水声传播建模而言, 声源一般都位于不计切变波的液体层中, 因此这里不考虑声源位于弹性介质中对积分核的贡献。

因此, 对于液体层, 每层将有两个未知数 ( $A^-, A^+$ ), 如果底层半无限空间用液体层建模, 根据无限远的边界条件要求, 该层将只剩下  $A^+$  一个未知数。而对于弹性介质层, 每层将有四个未知数 ( $A^-, A^+, B^-, B^+$ ), 同样对于半无限空间的情形, 也只有  $A^+, B^+$  两个未知数。液体层与液体层之间要满足的边界条件是垂直位移和法向压力连续, 可以构成两个方程。液体层与弹性介质层之间要满足垂直位移和法向压力连续以及切向压力为 0, 可以构

成三个方程。而弹性介质层之间则要满足垂直位移、切向位移、法向和切向压力都连续的条件,这样就可以构成四个方程。加上表面层的压力释放面假设,可以知道未知数的个数与方程的个数正好是相等的。可以构建一个方程组来解出各个未知数。因此解深度相关格林函数这一步实际上就是构建一个方程组然后求解的过程。

用  $v_m(k_r, z) = [w(k_r, z), u(k_r, z), \sigma_{zz}(k_r, z), \sigma_{rz}(k_r, z)]$  表示第  $m$  层中的四个积分核,  $a_m(k_r) = [A^-(k_r), A^+(k_r), B^-(k_r), B^+(k_r)]$  表示第  $m$  层的未知参数向量。显然  $m$  层介质的性质决定了这两个向量中非零元素的个数。则式(6)、(8)可以统一用下式表示:

$$v_m(k_r, z) = c_m(k_r, z)a_m(k_r) \quad (9)$$

其中  $c_m(k_r, z)$  称为层  $m$  中局部系数矩阵。设  $m$  层和  $m+1$  层公共界面深度值为  $z_m$ , 两层之间的边界条件可以写为:

$$v_m(k_r, z_m) - v_{m+1}(k_r, z_m) = \hat{v}_{m+1}(k_r, z_m) - \hat{v}_m(k_r, z_m) \quad (10)$$

其中  $\hat{v}_m(k_r, z_m)$  表示层  $m$  声源的贡献(式(7))。结合式(9)(10),并反复应用到其他界面,就能得到一个方程组,其形式可以用  $AX = B$  表示,其中  $A$  为由所有局部系数矩阵  $c(k_r, z)$  组成的  $N \times N$  的矩阵,称为全局系数矩阵( $N$  为未知参数的个数),  $X$  为  $N \times 1$  的未知参数向量,  $B$  为  $N \times 1$  的向量,由式(10)右端构成,表示界面上不同层的声源贡献差。

为了保持方程解的数值稳定性,可以采取几个措施。首先可以在每层中采用“相对坐标”,不同的指数项分别取不同的参考深度值,以式(5)为例即:

$$\begin{aligned} \psi(k_r, z) = & S_{\omega} \exp(ik_z |z - z_d|) / 4\pi ik_z \\ & + A^- \exp(-ik_z(z - z_d)) \\ & + A^+ \exp(ik_z(z - z_u)) \end{aligned} \quad (11)$$

其中  $z_d$  和  $z_u$  分别表示层下界面和上界面的深度坐标值。这样当  $k_z$  在正虚轴上取值时,上式中指数项的值不会趋于无穷大。其次由于

$v_m(k_r, z)$  中  $\rho\omega^2$  以及  $\mu$  等的引入,全局系数矩阵中有些行与其他行相比还是会很大,因此对这些行可以进行必要的预处理,除掉比较大的公共系数,注意  $B$  中也要相应除去同样的系数。这样得到的全局系数矩阵实际上是一个有很多零元素的矩阵,特别是矩阵维数比较大时,此时可以采用稀疏矩阵的存储与解法。当矩阵维数不是很大时,也可以直接采用一般的方程组数值解法,如 Gauss 消去法,采用主元素 Gauss 消去法有利于保持方程解的数值稳定性。因为得到的全局系数矩阵是复矩阵,因此解方程的算法应该是能适用于复数域的,当然,也可以直接转化到实数域求解。

### 3.2 声场积分表达式计算方法

计算声场的积分表达式((4)式)最常用的方法是 FFP 算法<sup>[6]</sup>。其基本原理是首先按 Hankel 函数展开 Bessel 函数,然后取代表出射波的第一类 Hankel 函数并取其近似形式,则(4)式的积分可以化为:

$$\psi(r, z) \approx \sqrt{1/(2\pi r)} \exp(-\pi/4) \int_0^{\infty} \psi(k_r, z) \sqrt{k_r} \exp(ik_r r) dk_r \quad (12)$$

然后截断积分区域为  $[krmin, krmax]$ , 并对此区域按下式离散化:  $k_l = krmin + l\Delta k_r, l = 0, 1 \dots (M-1)$ , 其中  $M$  为总采样点数。同理对距离离散化为:  $r_j = r_{min} + j\Delta r, j = 0, 1 \dots (M-1)$ 。根据傅立叶变化的要求,易得到波数和距离步长需满足  $M\Delta k_r \Delta r = 2\pi$ 。

则(12)式化为:

$$\begin{aligned} \psi(r_j, z) = & \frac{\Delta k_r}{\sqrt{1/(2\pi r_j)}} \exp(-\pi/4) \sum_{l=0}^{M-1} [\psi(k_l, z) \\ & \exp(i\Delta k_l r_{min}) \sqrt{k_l}] \exp(i \frac{2\pi l j}{M}) \end{aligned} \quad (13)$$

上式可以采用 FFT 计算。需要计算的距离范围为距离最大值的选择提供了一定依据,同时距离最大值取得比较大对有些问题也有利于消除重叠。 $krmax$  的选择要确保不要截掉与近轴极点对应的尖峰,为了做到这一点,文献[1]给出的保守估计式为  $krmax \approx 1.1 \times \omega/c_{min}$ 。但是

也可以利用另外一个有用的方法,即绘制深度相关格林函数幅值-波数图,通过观察该图可以辅助判断  $kr_{max}$  选择是否合适。对于较简单的海洋环境,可以在理论上估计图上峰值的个数,同时可以增加  $M$  值以观察是否有遗漏。 $kr_{min}$  可以选择为 0 或一个较小值,而  $r_{min}$  则因为被积函数在距离 0 处的奇异性不能选择为 0,一般选择与距离步长相等。

水声传播对衰减常用的处理方法是对声速引入虚部,从而实波数变为复波数<sup>[1]</sup>。从上面的分析可以看出,建立的计算方法对于复波数也是适用的。因而波数积分方法可以很容易扩展到复数域计算衰减的问题。同时,波数积分方法也能很容易求解粘弹性介质中的声场,而不需要额外的理论和数值方法的修改。

### 4 仿真计算

下面结合仿真实例对基于波数积分方法的声场传播计算结果进行分析,并和应用较广的 Kraken 和 KrakenC 模型<sup>[8]</sup>的计算结果进行了比较。这两个模型都基于简正波理论,其中 Kraken 用扰动理论计算本征值的虚部,而 KrakenC 则直接在复数域进行复本征值的搜索。仿真实例环境参数为:海深 100m,密度  $1.0g/cm^3$ ,0 到 10m 为等速分布,声速 1515m/s,10m 到 100m 为负声速梯度,从 1515m/s 线性变化到 1500m/s。声源和接收器深度分别为 50m 和 95m。海底建模为无穷延伸半空间,压缩声速 1580 m/s,密度  $1.8g/cm^3$ ,衰减  $1.0dB/m\ kHz$ 。分别对 100Hz 和 1kHz 计算格林函数以及传播损失,结果如图 1.2 所示。

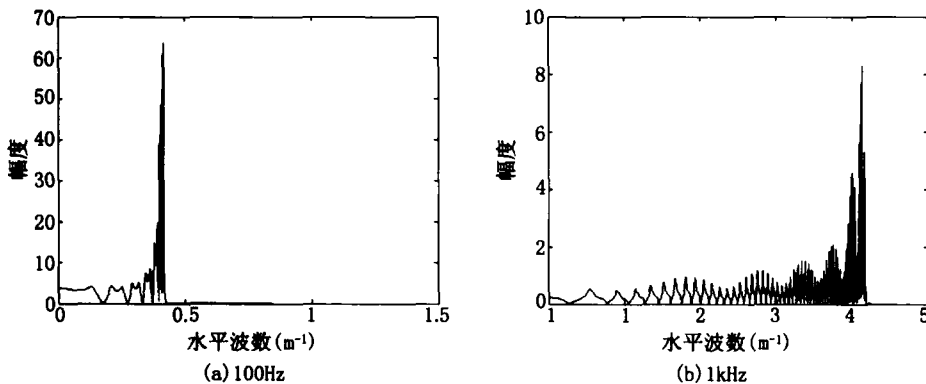


图1 格林函数幅度分布图

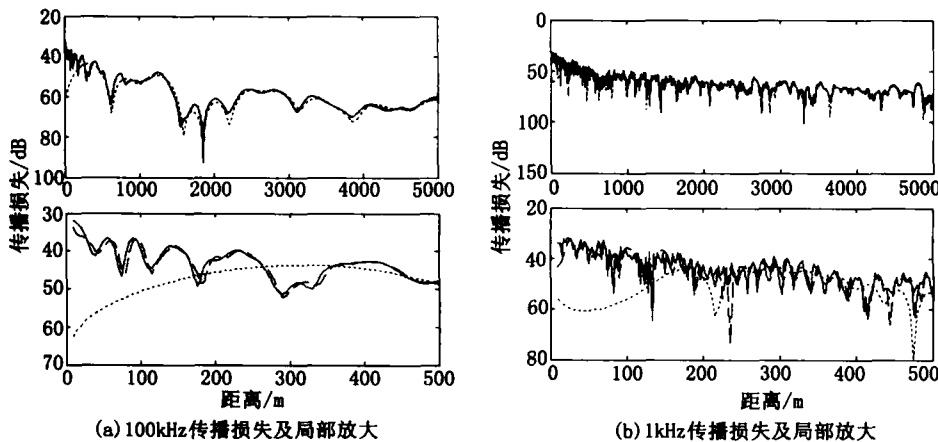


图2 传播损失比较

图中实线—波数积分,划线—KrakenC,点线—Kraken

从图 2 传播损失的比较可以看出,波数积分方法和 KrakenC 的计算结果差别吻合很好,仅在近场存在较小差别,和 Kraken 的计算结果相比,在一定距离外吻合也很好,但在近场存在较大的差别。从理论分析来看,由于波数积分方法采取的是直接数值积分(4)式的方法,因此其在近场误差最小。而简正波理论采取的是应用留数定理计算积分的方法,其中由于 KrakenC 应用的是直接在复数域搜索复本征值的方法,应此能计算部分随距离增加迅速衰减的高阶模,而 Kraken 则是直接忽略了主要对近场起作用的连续谱部分(分支线积分),因此相较而言,Kraken 在近场比 KrakenC 计算的误差更大。实际上在对波数积分方法做数值积分时也发现,仅对格林函数幅度存在较大峰值的区间作积分而忽略其他部分,计算结果的差别也仅存在于近场。在同样的软硬件平台上和同样的计算参数下,100Hz 时波数积分方法、KrakenC 和 Kraken 的计算时间分别约为 0.15s、0.2s、0.09s,1kHz 时的计算时间分别为 1.8s、1.7s 和 0.13s。可见,波数积分方法和 KrakenC 的计算时间差别并不大,但都比 Kraken 要耗时的多。由于 Kraken 在近场计算上误差,波数积分方法可以作为其在低频近场声场计算上的有效补充。

## 5 结论

本文在简要给出波数积分理论公式的基础上,重点讨论了其数值实现方法,强调了数值实现过程中的重点,提出了一些提高计算效率以及稳定性的方法,并结合仿真实例与基于简正波的模型 KrakenC 和 Kraken 的计算结果

进行了比较分析。结果表明,波数积分方法与两者计算结果的主要差别在近场,其中与 KrakenC 的差别较小,而与 Kraken 的差别较大,这主要是由于两个模型近场计算存在误差造成的。在低频段上,波数积分方法和 KrakenC 的计算时间差别并不大,但都比 Kraken 要耗时的多。由于 Kraken 在近场计算上误差,波数积分方法可以作为其在低频近场声场计算上的有效补充。波数积分方法还具有容易扩展到复数域计算衰减的问题、容易求解粘弹性介质中声场的特点。

## 参 考 文 献

- [1] Jensen F B, Kuperman W A, Porter M B et al. Computational Ocean Acoustics. New York: AIP Press, 1993.
- [2] Kuperman W A, Schmidt H. Self-consistent perturbation approach to rough surface scattering in stratified elastic media, J. Acoust. Soc. Am., 1989, 86(2): 1511-1522.
- [3] Lu I T, Felsen L B. Adiabatic transforms for spectral analysis of weakly range-dependent shallow ocean Green's functions, J. Acoust. Soc. Am., 1987, 81(1): 897-911.
- [4] Seong W. Hybrid Galerkin boundary element wavenumber integration method for acoustic propagation in laterally inhomogeneous media. MIT, Cambridge, MA, 1991.
- [5] Goh J T, Schmidt H. A hybrid coupled wave-number integration approach to range-dependent seismoacoustic modeling. J. Acoust. Soc. Am., 1996, 100(3): 1409-1420.
- [6] DiNapoli F R, Deavenport R L. Theoretical and numerical Green's function solution in a plane layered medium, J. Acoust. Soc. Am., 1980, 67(1): 92-105.
- [7] 杜功焕,朱哲民,龚秀芬.声学基础,南京:南京大学出版社,2001.3.
- [8] Porter M B. The Kraken Normal Mode Program. SACLANT Underwater Centre, 1995.