

水平变化波导中一种声场计算方法的数值实现*

秦继兴^{1,2†} 杨春梅^{1,2} 骆文于¹

(1 中国科学院声学研究所声场声信息国家重点实验室 北京 100190)
(2 中国科学院研究生院 北京 100049)

摘要 全局矩阵方法计算水平变化环境中的声场具有稳定性好、速度快、精度高等优点,在数值实现中如何快速、准确的求解大规模矩阵是该方法的一个关键问题。本文针对全局矩阵的特点,分别利用两种矩阵求解器, PARDISO 和 LAPACK, 求解该问题。经过比较和讨论,得出结论: LAPACK 对于全局矩阵的求解更有优势,求解速度快,而且可求解问题规模相对较大。使用不同的数值实现方法计算了楔形波导的传播损失(ASA 标准问题),与解析解比较,证明全局矩阵方法计算精度很高。

关键词 全局矩阵方法, 耦合简正波, 水平变化波导, 线性系统求解器

中图分类号: O427.1

文献标识码: A

文章编号: 1000-310X(2012)02-0145-07

Numerical implementation of a coupled-mode method in range-dependent waveguides

QIN Jixing^{1,2} YANG Chunmei^{1,2} LUO Wenyu¹

(1 State Key Laboratory of Acoustics, Institute of Acoustics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190)
(2 Graduate University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049)

Abstract The direct global matrix approach can be applied to the computation of acoustic field in range-dependent waveguides in order to achieve numerically stable and accurate solutions efficiently. It is an important issue on solving large linear systems efficiently and accurately in numerical implementation. Two linear system solvers, LAPACK and PARDISO are tested separately. Numerical results indicate that LAPACK, which is more efficient and capable of dealing with larger scale problems, is more appropriate for this purpose than PARDISO. Transmission loss for a problem involving a wedge-shaped waveguide (an ASA benchmark problem) is computed with different system solvers. A comparison between the present method and the analytical solution indicates that the present method is highly accurate.

Key words Direct global matrix approach, Coupled modes, Range-dependent waveguides, Linear system solvers

1 引言

对于水平不变和水平变化相对缓慢的海洋

环境,有很多声场计算模型可采用,较为常用的有绝热简正波理论^[1]、抛物方程理论^[2]、射线理论^[3]等。我国学者提出的广义相积分理论

2011-07-11 收稿; 2011-11-11 定稿

*中国科学院声学研究所知识创新工程资助项目

作者简介: 秦继兴(1986-), 男, 黑龙江齐齐哈尔人, 博士研究生, 研究方向: 水声物理。

杨春梅(1984-), 女, 博士研究生。 骆文于(1972-), 男, 研究员。

†通讯作者: 秦继兴, E-mail: qjx@mail.ioa.ac.cn

(WKBZ)^[4]和波束位移射线筒正波理论(BDRM)^[5]分别在深海和浅海实现了声场的快速、精确计算。绝热筒正波理论忽略了不同号筒正波之间的耦合,当海洋环境水平变化较剧烈时,用绝热近似计算声场往往会产生较大偏差。耦合筒正波方法^[6]考虑了不同号筒正波之间的耦合,计算精度高,而且对于所有频率都适用。对于水平变化环境,各种模型计算声场通常都将耦合筒正波结果作为比较基准。耦合筒正波方法的最大缺点就是计算量大,计算速度慢。

本文采用的全局矩阵方法解决了传统耦合筒正波方法存在的数值不稳定问题,并且与Evans的COUPLE^[7]程序相比,计算速度更快。但是,由于在解决实际问题时全局矩阵具有比较大的规模,这对计算机的内存和大规模矩阵求解的稳定性以及计算效率提出了较高要求。本文主要讨论全局矩阵方法计算水平变化环境中声场的数值实现问题。

2 理论

根据Evans的推导^[6],将水平非均匀问题分成 N 段,每一段为水平不变的传播问题,如图1所示。

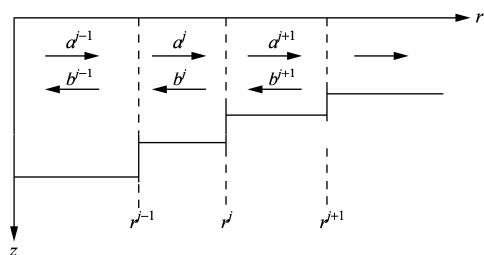


图1 耦合筒正波方法中水平分段示意图

忽略高阶筒正波的贡献,对于柱坐标系下的点源问题,第 j 段声压的通解可以写成

$$p^j(r, z) = \sum_{m=1}^M [a_m^j H1_m^j(r) + b_m^j H2_m^j(r)] \Psi_m^j(z), \quad (1)$$

式中 $H1, H2$ 是归一化Hankel函数,为了避免溢出问题,采用下面的形式:

$$H1_m^j(r) = \frac{H_0^{(1)}(k_{rm}^j r)}{H_0^{(1)}(k_{rm}^j r^{j-1})}, \quad (2)$$

$$H2_m^j(r) = \frac{H_0^{(2)}(k_{rm}^j r)}{H_0^{(2)}(k_{rm}^j r^j)}. \quad (3)$$

在 $j=1$ 的特殊情况下,定义 $r^{j-1} = r^1$ 。在 $k_{rm}^j r \gg 1$ 时,用大宗量渐近表达式代替Hankel函数更为方便,即

$$H1_m^j(r) \sim \sqrt{\frac{r^{j-1}}{r}} e^{ik_{rm}^j(r-r^{j-1})}, \quad (4)$$

$$H2_m^j(r) \sim \sqrt{\frac{r^j}{r}} e^{-ik_{rm}^j(r-r^j)}. \quad (5)$$

在第 j 个界面上($r = r^j$)使用声压连续和法向质点振速连续边界条件,表示成矩阵形式,并有 $H1^{j+1} = I$ 和 $H2^j = I$, I 为单位矩阵,得到关于 a, b 的方程,

$$a^{j+1} + H2^{j+1} b^{j+1} = \tilde{C}^j (H1^j a^j + b^j), \quad (6)$$

$$a^{j+1} - H2^{j+1} b^{j+1} = \hat{C}^j (H1^j a^j - b^j), \quad (7)$$

其中, a, b 分别是元素为 a_i, b_i 的列向量, $H1^j$ 和 $H2^{j+1}$ 表示对角阵,对角线上元素分别为 $H1_m^j(r^j)$ 和 $H2_m^{j+1}(r^j)$ 。 \tilde{C}^j 和 \hat{C}^j 分别是元素为 \tilde{c}_{lm}^j 和 \hat{c}_{lm}^j 的矩阵,

$$\tilde{c}_{lm}^j = \int \frac{\Psi_l^{j+1}(z) \Psi_m^j(z)}{\rho^{j+1}(z)} dz, \quad (8)$$

$$\hat{c}_{lm}^j = \frac{k_{rm}^j}{k_{rl}^{j+1}} \int \frac{\Psi_l^{j+1}(z) \Psi_m^j(z)}{\rho^j(z)} dz. \quad (9)$$

加上 $r \rightarrow \infty$ 的辐射条件, $b^N = 0$,另外 $r = 0$ 处的边界条件是

$$a_m^1 = \frac{i}{4\rho(z_s)} \Psi_m^1(z_s) H_0^{(1)}(k_{rm}^1 r^1) + b_m^1 \frac{H_0^{(1)}(k_{rm}^1 r^1)}{H_0^{(2)}(k_{rm}^1 r^1)}, \quad m = 1, \dots, M. \quad (10)$$

将式(6)、式(7)、式(10)以及 $r \rightarrow \infty$ 的辐射条件 $b^N = 0$ 联合起来,得到最终的全局矩阵问题,如式(11)所示。

$$\begin{bmatrix} 1.0 & -1.0 & 0.0 & -3.0 & 0.0 \\ -2.0 & 5.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 4.0 & 6.0 & 4.0 \\ -4.0 & 0.0 & 2.0 & 7.0 & 0.0 \\ 0.0 & 8.0 & 0.0 & 0.0 & -5.0 \end{bmatrix}.$$

对于这样一个稀疏矩阵, 将非零元素存储在 A 中,

$$A = [1.0, -1.0, -3.0, -2.0, 5.0, 4.0, 6.0, 4.0, -4.0, 2.0, 7.0, 8.0, -5.0], \quad (18)$$

JA 、 IA 与之对应,

$$JA = [1, 2, 4, 1, 2, 3, 4, 5, 1, 3, 4, 2, 5], \quad (19)$$

$$IA = [1, 4, 6, 9, 12, 14]. \quad (20)$$

IA 最后一项为非零元素个数加 1。

将全局矩阵的非零值存储在 A 中, 共有 $4M(M+1)(N-1)$ 个元素, 为复数 (每个元素占用 16 字节), JA 的大小与 A 相同, 为整数 (每个元素占用 4 字节), 其他变量相对较小, 不做考虑。那么占用内存共计 $80M(M+1)(N-1)$ 字节, 近似等于 $80M^2N$ 字节, 与简正波号数的平方成正比, 并与水平分段数成正比。PARDISO 在求解过程中, 矩阵重排与符号分解、矩阵 LU 分解这两个步骤需要定义新的矩阵, 并分配较大内存空间, 这些额外内存是 A 和 JA 所占内存之和的数倍, 这很大程度上限制了 PARDISO 的求解规模。本工作中使用的普通台式计算机, 在 Windows XP 32 位操作系统下, 最大可管理内存不足 2 GB。在这种条件下, PARDISO 最大可处理的规模近似为: 简正波号数 $M=100$, 水平分段数 $N=350$ 。

上面提到的处理规模, PARDISO 所有对矩阵的操作都是在内存上实现的, 即 In-Core (IC) 模式。PARDISO 还提供了 Out-Of-Core (OOC) 模式, 可将矩阵分解过程中产生的部分文件写在指定的磁盘位置, 然后在需要的时候进行读取。这在一定程度上扩大了 PARDISO 的处理规模。同等条件下, PARDISO 在 OOC 模式下最大可处理规模近似为: 简正波号数 $M=100$, 水平分段数 $N=500$ 。PARDISO 的 OOC 模式增加了对矩阵的处理规模, 平均可增加 35% 左右, 但是由于增加了文件的存储和读取过程, 会降低求解速度。

3.2 LAPACK 求解全局矩阵

LAPACK (Linear Algebra PACKage) 是由美国国家科学基金 (NSF) 等资助开发的著名的公开软件, 以 Fortran 编程语言书写, 用于数值计算的函数集。LAPACK 提供了丰富的工具函数, 可用于诸如解多元线性方程组、线性最小二乘问题、特征值问题、以及奇异值问题等, LAPACK 还可以实现矩阵分解和条件数估计等相关的计算。LAPACK 可以针对带状矩阵 A 求解 $AX = B$ 形式的线性方程组问题, 效率高, 稳定性好。

一个 $n \times n$ 的带状矩阵 A , 具有 kl 条下对角线和 ku 条上对角线。将 A 中带内的元素逐一映射到 $(kl + ku + 1) \times n$ 的新矩阵 AB 中, 对于 A 中元素 a_{ij} , 映射到 $AB(ku + 1 + i - j, j)$ 中去。选择一个与全局矩阵类似的带状矩阵作为例子进行说明, $n=5$, $kl=ku=2$,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ & & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix}, \quad (21)$$

那么与之对应的存储矩阵为,

$$AB = \begin{bmatrix} & & a_{13} & a_{24} & a_{35} \\ & a_{12} & a_{23} & a_{34} & a_{45} \\ a_{11} & a_{22} & a_{33} & a_{44} & a_{55} \\ a_{21} & a_{32} & a_{43} & a_{54} & \\ a_{31} & a_{42} & a_{53} & & \end{bmatrix}. \quad (22)$$

由于要对矩阵 AB 进行 LU 分解, AB 需要足够的空间存储分解后的矩阵, 此时要求上对角线至少为 $kl + ku$, 那么对应的矩阵维数为 $(2 \times kl + ku - 1) \times n$, a_{ij} 对应为 $AB(ku + kl + 1 + i - j, j)$ 。

对于全局矩阵, $n = (2N - 1)M$, $kl = ku = 3M - 1$, 那么矩阵元素个数大约等于 $18M^2N$, 同样与简正波号数的平方成正比, 并与水平分段数成正比。LAPACK 在求解过程中, 采用了分块算法来提高数据的访问速度和数据的再利用。矩阵分解所使用的内存空间不会超出矩阵 AB 的大小, 也就是说, 如果 AB 不超出计算机内存, 就可以得到正确的计算结果。对于本问题,

LAPACK 最大可处理的规模近似为: 简正波号数 $M=100$, 水平分段数 $N=600$ 。经估算, 使用内存为 1.73 GB, 与计算机可管理内存大致相同。

4 算例及讨论

从上面的分析可以看出, 在相同计算条件下, LAPACK 能够处理的矩阵规模要比 PARDISO 略大, 下面详细进行讨论。针对一个 ASA 标准问题^[10], 使用全局矩阵方法计算声场, 并使用不同的数值实现方法。标准问题的环境由均匀海水 ($c=1500\text{m/s}$, $\rho=1\text{g/cm}^3$) 和绝对软楔形海底组成, 如图 2 所示。在声源处

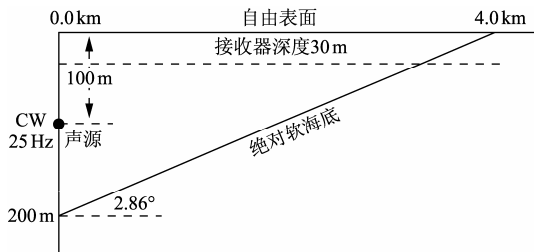
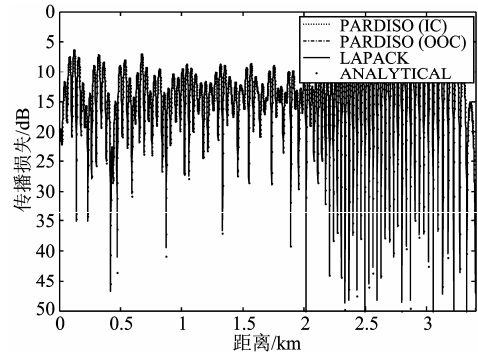


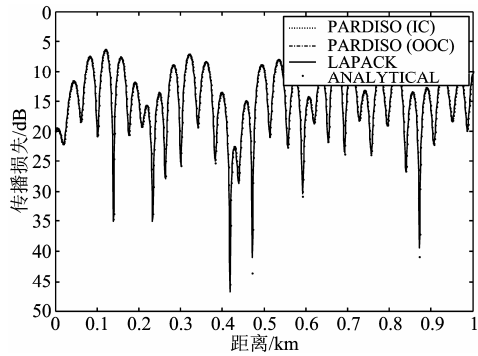
图 2 ASA 标准问题示意图

海深 200m, 海深线性减小, 距声源 4km 处减小到 0m, 斜坡倾斜角度近似等于 2.86° 。25Hz 声源置于 100 m 深度, 采用线源, 接收深度为 30 m。在这个深度下, 0~3.4 km 可接收到能量。为了得到收敛的结果, 水平分段数要满足文献[11]中的离散化标准, 每段长度需要小于 $\lambda/4$, λ 为波长。对于这个标准问题, 水平分段数至少为 267。为了便于计算时间的统计, 适当增加计算规模, 水平分为 500 段。声源处有 6 号水平传播简正波, 为使近场计算结果收敛, 一共计算 20 号简正波。PARDISO 解决这个问题, 分别使用 IC 模式和 OOC 模式。图 3(a)是三种求解方法的计算结果, 并且与文献[12]中的解析解进行了比较, 图 3(b)给出了初始 1 km 的比较结果。从图 3(a)和图 3(b)可以看出, 不同数值实现方法得到的三条曲线完全重合, 计算精度相同, 并且与解析解十分一致。

由于 PARDISO 的 OOC 模式需要将部分文件在磁盘上进行读写, 与 IC 模式相比, 降低了运算速度。LAPACK 针对带状矩阵的特点, 求解速度较快。表 1 给出了本算例的运算时间, 其



(a) 0~3.4 km



(b) 0~1 km

图 3 ASA 标准问题结果比较

中矩阵运算时间指 PARDISO 和 LAPACK 的内部求解时间, 程序运行总时间, 包括矩阵运算时间、矩阵的前期存储时间以及矩阵中各个参数的计算时间等。尽管一些数值测试表明, PARDISO 是目前最快的线性稀疏矩阵的求解方法之一, 但是, 通过比较可以看出, 求解这种带状矩阵, LAPACK 的计算效率更高。需要强调的是, LAPACK 能够解决密集矩阵和带状矩阵问题, 但是没有针对稀疏矩阵求解的功能。这里使用的全局矩阵, 在带状内部仍有很多 0 元素, LAPACK 在对带状矩阵求解时没有考虑到这个特点, 会将 0 元素一同进行分解等处理, 这会在一定程度上增加矩阵的规模和求解的计算量。也就是说, LAPACK 在处理带状矩阵的性能上仍有提高的空间。表 1 也给出了 COUPLE

表 1 标准问题计算时间比较

计算方法	程序运行总时间 (s)	矩阵运算时间 (s)
PARDISO (IC)	2.24	1.31
PARDISO (OOC)	5.43	4.32
LAPACK	0.82	0.11
COUPLE	13.01	—

程序对本算例的计算时间,可以看出,全局矩阵方法计算水平变化波导中声场,比 COUPLE 的速度快很多。

对于上面提到的 ASA 标准问题,将水平距离增加至 10 km 进行传播损失计算。这个算例中,声源处海深 500 m,海深线性减小,距声源 10 km 处减小至 0 m,斜坡倾斜角度不变,仍近似为 2.86° ,其它参数与前面算例相同。声源处有 16 号水平传播筒正波,计算中使用 40 号筒正波以得到收敛结果,水平分为 1000 段(大于离散化标准要求的 667 段)。图 4(a)给出了三种求解方法的计算结果,与解析解进行了比较,图 4(b)是初始 1 km 的比较结果。不同求解方法的计算结果相同,并且与解析解十分一致。表 2 给出了各种数值实现方法以及 COUPLE 程序的运算时间,可以看出,对于全局矩阵的求解, LAPACK 的计算效率要优于 PARDISO。另外,全局矩阵方法计算水平变化波导中声场,与 COUPLE 相比计算速度优势明显。

对于图 2 所示的 ASA 标准问题,将声源频率变为 100 Hz。这种情况下,声源处有 26 号水

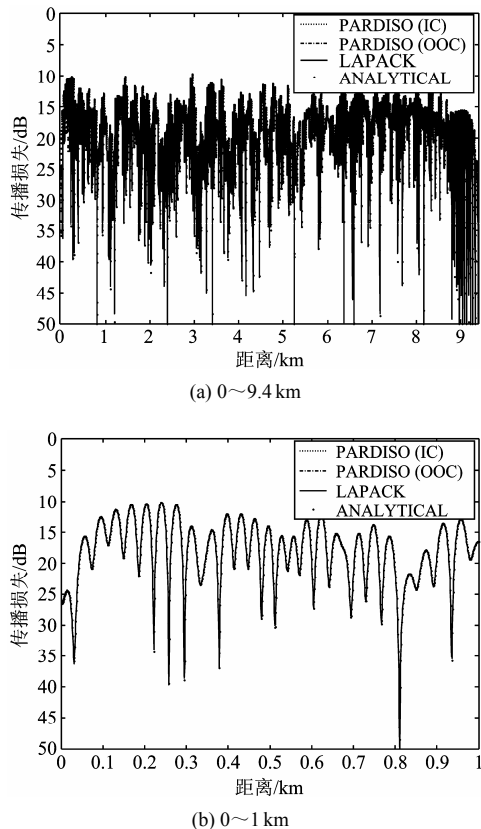


图 4 水平距离增至 10 km 后传播损失比较

表 2 水平距离增至 10 km 后计算时间比较

计算方法	程序运行总时间 (s)	矩阵运算时间 (s)
PARDISO (IC)	14.62	7.82
PARDISO (OOC)	36.03	29.29
LAPACK	11.98	4.11
COUPLE	134.50	—

平传播筒正波。计算 50 号筒正波,水平分为 1500 段(大于离散化标准要求的 1067 段)。图 5(a)是三种求解方法的计算结果,同样与解析解进行了比较,图 5(b)给出了初始 1 km 的比较结果。不同

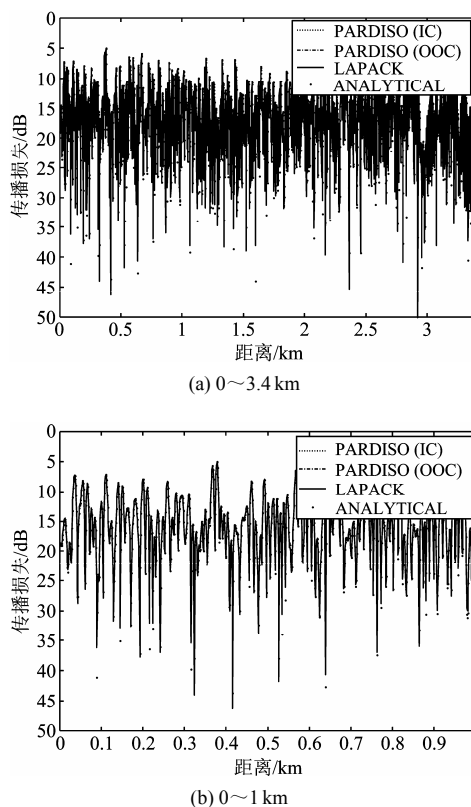


图 5 100 Hz 声源结果比较

方法的计算结果仍然相同,但是与解析解相比,出现了细微的差别。这种差别不是数值计算造成的,是因为波导模型存在差异。实际波导在 $r=4$ km 处海深为 0 m,但是耦合筒正波方法在计算声场时要求计算出各个位置的本征函数,如果海深为 0 m,将无法进行本征函数的求解。所以在使用全局矩阵方法求解声场时,令 $r=4$ km 处海深为 0.01 m。在 25 Hz 时这种近似与实际波导的差异没有体现出来,而在 100 Hz 时由于波长较短,这种差异被放大,引起了声场计算结果的细

微差别。表 3 给出了 100 Hz 时各种数值实现方法的运算时间, 并给出了 COUPLE 程序的计算时间。

表 3 100 Hz 计算时间比较

计算方法	程序运行总时间 (s)	矩阵运算时间 (s)
PARDISO (IC)	34.56	18.94
PARDISO (OOC)	88.64	72.87
LAPACK	28.73	9.84
COUPLE	381.92	—

5 结论

全局矩阵方法计算水平变化环境中声场具有稳定性好、速度快、精度高等优点, 本文主要讨论了全局矩阵方法在计算声场过程中遇到的大型稀疏矩阵求解的数值实现问题。文中首先计算了楔形波导的传播损失 (ASA 标准问题), 然后在标准问题的基础上, 分别将水平距离增至 10 km 和将声源频率变为 100 Hz 计算传播损失。通过三个算例的数值计算结果比较, 可以发现, 虽然 PARDISO 求解普通稀疏矩阵更有优势, 并且能够使用 OOC 模式扩大求解规模, 但针对全局矩阵方法中的带状矩阵特点, LAPACK 是更合适的选择。与 PARDISO 相比, LAPACK 计算速度更快, 可求解问题规模更大, 对于实际声场预报更有意义。但是, 对于这种带状并且稀疏的矩阵, LAPACK 的性能还有提高的空间。

根据实际需要, 如果求解更大规模的全局矩阵问题, 则必须扩展计算机内存, 并且选择合适的操作系统。

参 考 文 献

- [1] 张仁和, 刘红, 何怡. 水平缓变声道中的 WKBJ 绝热简正波理论[J]. 声学学报, 1994, 19(6): 408-417.
- [2] LEE D, PIERCE A D. Parabolic equation development in recent decade [J]. J. Comp. Acoust., 1995, 3(2): 95-173.
- [3] PORTER M B, BUCKER H P. Gaussian beam tracing for computing ocean acoustic fields [J]. J. Acoust. Soc. Am., 1987, 82(4):1349-1359.
- [4] 张仁和, 何怡, 刘红. 水平不变海洋声道中的 WKBJ 简正波方法[J]. 声学学报, 1994, 19(1): 1-12.
- [5] 张仁和, 李风华. 浅海声传播的波束位移射线简正波理论[J]. 中国科学(A 辑), 1999, 29(3): 241-251.
- [6] EVANS R B. A coupled mode solution for acoustic propagation in a waveguide with stepwise depth variations of a penetrable bottom [J]. J. Acoust. Soc. Am., 1983, 74(1): 188-195.
- [7] EVANS R B. The decoupling of stepwise coupled modes [J]. J. Acoust. Soc. Am., 1986, 80(5): 1414-1418.
- [8] SCHENK O, GÄRTNER K. PARDISO Users' Guide Version 4.1.2, 2011.
- [9] ANDERSON E, BAI Z, BISCHOF C, et al. LAPACK Users' Guide, 1999.
- [10] JENSEN F B, PERLA C M. Numerical solution of range-dependent benchmark problems in ocean acoustics [J]. J. Acoust. Soc. Am., 1990, 87(4): 1499-1510.
- [11] JENSEN F B. On the use of stair steps to approximate bathymetry changes in ocean acoustic models [J]. J. Acoust. Soc. Am., 1998, 104(3): 1310-1315.
- [12] BUCKINGHAM M J, TOLSTOY A. An analytical solution for benchmark problem1: The "ideal" wedge [J]. J. Acoust. Soc. Am., 1990, 87(4):1511-1513.