Journal of Applied Acoustics

#### ◇ 研究报告 ◇

# 多项式混沌展开的浅海水声环境参数敏感度分析\*

张 鹏<sup>1,2†</sup> 吴立新<sup>1</sup> 胡治国<sup>1</sup> 张雪冬<sup>1</sup>

(1 中国科学院声学研究所 声场声信息国家重点实验室 北京 100190)(2 中国科学院大学 北京 100049)

**摘要:**水下声场是海洋环境参数的非线性函数,因此环境参数的不确定性必然会引起水下声场预测的不确定 性,从而导致与声场预测相关的声呐探测和水声通信等设备性能的下降。该文将 Sobol 敏感度指数的计算与 多项式混沌展开方法相结合,将敏感度指数表达为环境条件的函数,利用 Q 范数约束的双曲截断方案来减少 多项式项数,有效地分析了设定的"浅海负梯度温跃层"信道中 8 个环境参数及其交互效应对水下声传播的影 响。结果表明,沉积层声速是低频远距离声场不确定性分布的最主要贡献参数,同时对于下发下收的情况,声 源深度的影响程度随着声源频率增加而逐渐增大。最后应用射线理论从海底反射的角度解释了各个环境因素 影响程度差异的具体原因。该文的研究对水声通信和探测系统在浅海不确定环境下的性能预报研究具有重要 的参考意义。

关键词:不确定性传播;环境敏感度分析;多项式混沌展开;传播损失

中图法分类号: P733.21+3 文献标识码: A 文章编号: 1000-310X(2021)03-0422-11 DOI: 10.11684/j.issn.1000-310X.2021.03.014

# Sensitivity analysis of uncertain environmental parameters in shallow water based on polynomial chaos expansion

ZHANG Peng<sup>1,2</sup> WU Lixin<sup>1</sup> HU Zhiguo<sup>1</sup> ZHANG Xuedong<sup>1</sup>

State Key Laboratory of Acoustics, Institute of Acoustics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China)
 (2 University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China)

Abstract: Underwater sound field is a function of ocean environmental parameters. Therefore, the uncertainty of environmental parameters will inevitably cause the uncertainty of sound field prediction, which will lead to the degradation of underwater acoustic communication and detection performance. In this paper, the calculation of the Sobol sensitivity index is combined with the polynomial chaos expansion method to calculate the influence of 8 environmental parameters in the set "shallow sea negative gradient thermocline" channel on sound field propagation. The results show that the sedimentary sound speed is the most important parameter contributing to the uncertain distribution of low frequency and long range sound field. At the same time, the influence of sound source depth gradually increases with the increase of source frequency. We use the ray theory to explain the specific reasons for the difference in the degree of influence of various environmental factors. Numerical simulation results verify the effectiveness of the method used in this paper. The research results are important for the prediction of underwater acoustic communication and detection system in the shallow water with uncertain environment.

Keywords: Uncertainty propagation; Sensitivity analysis; Polynomial chaos expansion; Transmission loss

<sup>2020-07-19</sup> 收稿; 2020-12-09 定稿

<sup>\*</sup>国家自然科学基金项目(11774374)

作者简介:张鹏 (1992-),男,河南灵宝人,博士研究生,研究方向:水声物理,性能分析。

<sup>†</sup>通信作者 E-mail: zhangpeng215@mails.ucas.ac.cn

## 0 引言

水声信道是一个时空频变化的复杂多途信道。 海洋环境特性随着时间、季节、地域和海洋动力过 程等因素而产生不确定的变化,这些不确定的变化 必然会导致由海洋环境参数决定的水下声场的不 确定分布,从而引起水声通信和探测系统性能的降 低<sup>[1-2]</sup>。因此需要深入了解海洋环境参数不确定情 况下声场分布统计特性以及各个环境参数对声场 分布的影响程度,来实现声呐系统的性能评估预报 或者对声呐系统的设计进行指导。

近些年来,海洋声学中的不确定性研究受到了 广泛的关注,研究的重点在于环境信息不完全的情 况下基于模拟的声场不确定性预测,同时定量地评 估不确定的环境参数对声场的影响<sup>[3-16]</sup>。传统的 蒙特卡洛方法在存在多个不确定环境参数时所需 计算量很大,且收敛较慢,而且该方法在进行环境 参数敏感度分析时仅考虑单个变量的影响,不能计 算不确定环境参数之间的交互效应[4-7]。还有一 些学者应用声场位移法来分析环境参数的敏感度, 但该方法有严格的适用条件,适用范围较窄[8-10]。 代理模型方法(多项式混沌展开(Polynomial chaos expansion, PCE)法、Kriging法等)是一种常用的处 理多维和非线性问题的有效方法,近年来被广泛用 于水声不确定传播问题的研究。已有的研究大多应 用 PCE 或者 Kriging 法来分析预测不确定环境下的 声场分布,但是研究选取的不确定环境参数数量较 少,随着环境参数数量的增加,需要更多的多项式展 开项数和训练点数使得计算结果收敛,这会导致计 算效率大幅度降低[11-16]。

本文考虑一个3层模型的浅海海洋环境,根据 设定的"浅海负梯度温跃层"信道,定量分析了代表 声速剖面、水深和沉积层的8个不确定环境参数对 水下声传播的影响,同时根据射线理论从海底反射 的角度解释了各个环境因素影响程度差异的具体 原因。

#### 1 声场分布的不确定性分析原理

水下声场的不确定性分析包含随机海洋环境 参数概率分布的不确定性量化、声场模型输出响应 集合的不确定性传播以及声场分布对于随机海洋 环境参数的敏感性分析。图1显示了基于PCE法的 声场不确定性分析过程。



图 1 基于 PCE 方法的声场不确定性量化分析 Fig. 1 Quantitative analysis of sound field uncertainty based on PCE model

#### 1.1 多项式混沌展开

由于海洋环境参数空间分布的不均匀性、海洋 动力过程导致的参数不确定性以及观测数据的测 量误差,环境参数表现出服从一定概率密度函数的 分布。将N个不确定的环境参数用集合 { $\xi_i$ }<sup>N</sup><sub>i=1</sub>来 表示,对于给定的概率空间,声场模型的输出值可以 展开为

$$P(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{\beta=0}^{\infty} \alpha_{\beta} \Gamma_{\beta}(\boldsymbol{\xi}) \approx \sum_{\beta \in \mathbf{A}} \alpha_{\beta} \Gamma_{\beta}(\boldsymbol{\xi})$$
  
=  $\alpha_{0} \Gamma_{0} + \sum_{i_{1}=1}^{N} \alpha_{i_{1}} \Gamma_{1}(\xi_{i_{1}}) + \sum_{i_{1}=1}^{N} \sum_{i_{2}=1}^{i_{1}} \alpha_{i_{1}i_{2}} \Gamma_{2}(\xi_{i_{1}}, \xi_{i_{2}})$   
+  $\sum_{i_{1}=1}^{N} \sum_{i_{2}=1}^{i_{1}} \sum_{i_{3}=1}^{i_{2}} \alpha_{i_{1}i_{2}i_{3}} \Gamma_{3}(\xi_{i_{1}}, \xi_{i_{2}}, \xi_{i_{3}})$   
+  $\cdots$ , (1)

其中,第一项为多项式混沌展开的均值, $\Gamma_{\beta}(\boldsymbol{\xi})$ 为各阶混沌展开项, $\alpha_{\beta}$ 为对应各阶混沌展开项的系数,  $\xi_{i_1},\xi_{i_2},\xi_{i_3},\cdots,\xi_{i_N}$ 表示一组互相独立的环境参数 随机变量。

如果用标准正态随机变量来描述不确定参数 变量*ξ*,则PCE方法可以将模型响应描述为不确定 参数的Hermite多项式函数的展开式。对于其他类 型的随机变量,可以使用不同的多项式基或进行适 当的变换<sup>[17]</sup>。表1总结了多项式的选择和随机变量 的分布类型之间的对应关系。

# 表1 随机变量分布与正交多项式之间的关系

Table 1Classical univariate polynomialfamilies used in PCE

变量分布类型	正交多项式
均匀分布	Legendre $P_k(x)$
高斯分布	Hermite $H_{e_k}(x)$
伽马分布	Laguerre $L_k^a(x)$
贝塔分布	Jacobi $J_k^{a,b}(\boldsymbol{x})$

多项式混沌展开的项数可由展开式的最高阶 数 M 以及随机变量的个数 N 确定为

$$A^{M,N} = \frac{(M+N)!}{M!N!}.$$
 (2)

根据稀疏效应原则,只有输入变量之间的低阶 相互作用才是最重要的,绝大部分高阶相互作用的 影响可以忽略。因此可以利用Q范数来定义一个双 曲截断方案:

$$A^{M,N,q} = \left\{ \alpha \in A^{M,N} : \left\| \alpha \right\|_q \leqslant N \right\}, \qquad (3)$$

式(3)中,

$$\|\alpha\|_q = \left(\sum_{i=1}^M \alpha_i^q\right)^{1/q}.$$
(4)

PCE方法的核心是展开系数  $\{\alpha_{\beta}\}_{\beta \in \mathbf{A}}$  的求解。 根据公式 (1) 可以得到

$$P(\boldsymbol{\xi}) = P^{\text{PCE}}(\boldsymbol{\xi}) + \varepsilon = \boldsymbol{\alpha}^{\text{T}} \Gamma(\boldsymbol{\xi}) + \varepsilon, \qquad (5)$$

式(5)中, $P(\boldsymbol{\xi})$ 是实际输出, $P^{PCE}(\boldsymbol{\xi})$ 为PCE方法预测输出, $\varepsilon$ 为残差。

PCE方法的系数求解问题可以构造为最小二 乘优化问题,使得残差最小化:

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}} = \arg\min_{\boldsymbol{\alpha}} E\left[\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} \Gamma(\boldsymbol{\xi}) - P(\boldsymbol{\xi})\right].$$
(6)

## 1.2 Sobol 敏感度分析

本文使用Sobol敏感度指数估计全局非线性敏 感度<sup>[18]</sup>。Sobol指数和PCE具有相似的多项式展 开,并且都使用正交项。因此,一旦计算出PCE的 多项式系数,就可以直接得到各阶Sobol指数和总 阶Sobol指数的解析解,而不需要任何额外的模型 计算。根据混沌多项式的正交性可以得到

$$\operatorname{Var}[P(\boldsymbol{\xi})] = \sum_{i=1}^{N} D_i + \sum_{1 \leq i < j \leq N} D_{ij} + \cdots, \quad (7)$$

式(7)中,

$$D_{i_1,\cdots,i_d} = \sum_{\beta \in \mathbf{A}} \alpha_{\beta}^2. \tag{8}$$

则Sobol敏感度指数为

$$S_{i_1,\cdots,i_d} = \frac{D_{i_1,\cdots,i_d}}{D} = \sum_{\beta \in \mathbf{A}} \frac{\alpha_\beta^2}{D}, \qquad (9)$$

而且满足 $\sum_{i=1}^{N} S_i + \sum_{1 \leq i < j = N} S_{ij} + \dots = 1$ ,其中 $S_i$ 为一阶敏感度指数, $S_{ij}$ 为二阶敏感度指数度指标,D为总方差。本文只关注一阶、二阶以及总的敏感度指数。

# 2 数值计算与分析

#### 2.1 环境参数设置

本文选取如图2所示的3层水声信道参数模型, 图2中确定性参数为声源频率500 Hz,温跃层下限 深度 $D_2 = 70$  m,海底附近声速为1500 m/s,其他 不确定参数及其分布如表2所示,其中沉积层的吸 收系数根据Hamilton 经验公式<sup>[19]</sup>来确定

$$\alpha\left(f\right) = K f^{\beta}.\tag{10}$$



图2 水声信道环境参数模型

Fig. 2 Environmental parameter model of shallow water acoustic channel

表 2 数值计算中使用的不确定性环境参数分布 Table 2 The uncertain environmental parameters in numerical caculations

序号	参数	分布
1	声源深度/(m·s <sup>-1</sup> )	$S \sim U(40, 60)$ $S \sim U(70, 90)$
2	温跃层上界深度/m	$D_1 \sim N(30,3)$
3	海表面声速/(m·s <sup>-1</sup> )	$C \sim U(1525, 1535)$
4	沉积层密度/(g·cm <sup>-3</sup> )	$ \rho_1 \sim U(1.3, 1.7) $
5	沉积层深度/m	$H_2 \sim U(20, 40)$
6	沉积层吸收系数 /(dB·m <sup>-1</sup> )	$\alpha_1 \sim$ $U(\alpha(f) - 0.1, \alpha(f) + 0.1)$
7	沉积层声速/(m·s <sup>-1</sup> )	$C_1 \sim U(1510, 1590)$
8	海底深度/m	$H_1 \sim U(95, 105)$

#### 2.2 声传播的不确定性分析

抛物方程近似声场模型(Range-dependent acoustic model-parabolic equation, RAM-PE)是一种常用的声场计算模型,本文采用该模型与多项式混沌展开法相结合来研究声场的不确定性分布。

图3给出了上发下收(声源深度:温跃层内;接 收深度:80 m)和下发下收(声源深度:温跃层以下; 接收深度:80 m)这两种收发情况在100 km接收距 离处PCE方法与10000次蒙特卡罗方法计算得到 的传播损失概率密度对比,两种方法计算的结果较 吻合,但是PCE方法仅需调用声场模型200次即可 满足给定的精度阈值1%的均方根误差,相较于蒙 特卡罗方法的计算效率大幅提升。可以看到声源位 于温跃层以下时,传播损失均值和标准差较小,分 布相对集中;而当声源位于温跃层内时,由于温跃 层声速的分布特性,声线与海底的相互作用明显增 加,因此海洋环境的不确定性对传播损失的影响更 加剧烈。接下来将利用Sobol敏感度指数来定量分 析表2中各个序号对应的环境参数对声场分布的影 响程度。

#### 2.3 环境参数敏感度分析

应用1.1节中Sobol敏感度分析方法,图4给 出了声源分别位于温跃层内和温跃层以下时在 100 km接收距离80 m接收深度处的环境参数敏感 度指数,两种情况下沉积层声速的不确定性对于该 接收位置处的传播损失的影响都是占绝对主导地 位,但是声源位于温跃层内时,声源深度对声场分布 的不确定性也有一定的贡献,其他因素的影响基本 可以忽略。同时观察到仅有环境参数的低阶相互作 用对声场不确定性分布影响显著,高阶相互作用的 影响可以忽略,这也符合稀疏效应原则,因此后续主 要从总敏感度指数的角度来分析环境参数的影响 程度。







图5为上发下收和下发下收时所有随机参数的 总敏感度指数随传播距离的变化。观察发现两种收 发情况下在20km传播距离内,各个环境参数都对 声场的不确定性分布有较重要的影响,且随着传播 距离的增加,除了沉积层声速外的各个参数影响程 度逐渐减小。 应用声学





当传播距离大于20 km时,两种收发情况下声 场分布对环境参数的敏感度呈现一定的差异:对于 温跃层内的声源,声源深度的敏感度指数随着传播 距离增加逐渐增大,并且在60 km以后稳定在0.25 左右, 沉积层声速的敏感度指数总体保持在0.7以 上。这是由于跃层中声速的负梯度使得声线向海底 传播,进而增加了与海底的相互作用次数,本文并未 考虑海面粗糙度以及波浪等海表面不确定性参数 对声传播的影响,因此海底环境参数对声场影响最 大,其中海底沉积层声速的影响最大。其他环境参 数的影响非常小,基本可以忽略。当声源位于温跃 层以下时,各个环境参数中,沉积层声速的敏感度指 数基本保持在0.85以上,是声场不确定性分布的最 主要贡献参数,其他环境参数的敏感度指数都低于 0.1。因此对于20 km以后的声场分布,给定环境下 仅需要重点考虑沉积层声速的影响。

根据上述计算分析结果,选择下发下收的情况 研究不确定环境参数对不同频率声源声场分布的 影响。从图6可以看到,当声源位于温跃层以下时, 声源深度对声场分布的影响随着频率的升高不断 增加,与之相反的是沉积层声速敏感度指数逐渐降 低。在较低频段内(0~1700 Hz),声源深度的敏感 度指数在0.8以上,其他参数敏感度指数在绝大多 数频率下均保持在0.2以下。

#### 2.4 环境参数敏感度差异解释

海水中声信号经过远距离传输后的能量损失 主要由声传播过程中波阵面的扩展带来的扩展衰 减、不均匀海水介质造成的吸收衰减以及海底海面 边界反射的损失组成。由于给定的信道环境未考虑 海面的影响,而且通过敏感度指数的分析发现海底 底质声学参数对声场分布影响较大,因此这里重点 从射线角度分析海底沉积层参数的影响。





Fig. 5 The Sobol sensitivity index varies with propagation distance





Fig. 6 The Sobol sensitivity index varies with source frequency





Fig. 7 Reflection and transmission by a layered halfspace

考虑如图7所示的3层模型<sup>[20]</sup>,图中*R<sub>ij</sub>和T<sub>ij</sub>*分别表示反射系数和透射系数,下标对应传播的方向。除了边界处幅度的变化,还需要考虑相位的变化:

 $\varphi_2 = k_2 h_2 \sin \theta_2 = 2\pi \left( h_2 / \lambda_2 \right) \sin \theta_2. \tag{11}$ 

则总的反射系数

$$R = R_{12} + T_{12}R_{23}T_{21}\exp(2i\varphi_2) + T_{12}R_{23}^2R_{21}T_{21}\exp(4i\varphi_2) + \cdots$$
$$= R_{12} + T_{12}R_{23}T_{21}\exp(2i\varphi_2)\sum_{n=0}^{\infty} (R_{23}R_{21}\exp(2i\varphi_2))^n = R_{12} + T_{12}R_{23}T_{21}\exp(2i\varphi_2)\frac{1}{1 - R_{23}R_{21}\exp(2i\varphi_2)} = \frac{R_{12} + R_{23}\exp(2i\varphi_2)}{1 + R_{12}R_{23}\exp(2i\varphi_2)},$$
(12)  
 $\vec{x}$ (12)  $\vec{r}$ ,

$$R_{ij} = \frac{Z_j - Z_i}{Z_j + Z_i},\tag{13}$$

其中, $Z_i$ 为有效阻抗, $Z_i = \frac{\rho_i}{c_i} \sin \theta_i$ 。 则公式(12)转化为用有效阻抗来表示:

$$R = \frac{Z_2(Z_3 - Z_1) - i(Z_2^2 - Z_1Z_3)\tan\varphi_2}{Z_2(Z_3 + Z_1) - i(Z_2^2 + Z_1Z_3)\tan\varphi_2}.$$
 (14)  
海底反射损失可以表示为

$$BL = -20 \lg |R|. \tag{15}$$

在考虑沉积层吸收时,公式(13)中有效阻抗中 沉积层声速和基底声速可以分别表示为<sup>[20]</sup>

$$\hat{c}_2 = c_2 / \sqrt{1 + i\alpha^{(\lambda)} / 27.29},$$
  
 $\hat{c}_3 = c_3 / \sqrt{1 + i\alpha^{(\lambda)} / 27.29}.$  (16)

将表2中的不确定环境参数带入式(15)求解海 底反射损失,统计其在不同频率和角度分布的标准 差和均值结果,如图8所示。



图 8 海底反射损失标准差和均值分布 Fig. 8 The standard deviation and mean distribution of bottom reflection loss

为了方便解释,通过Bellhop射线模型计算上 发下收和下发下收两种情况下典型声源深度(50 m 和80 m)对应的本征声线和时间到达结构,如图9 所示,计算结果也可以反映两种情况下不同声源深 度对应声线和到达结构的总体趋势。图9中:蓝绿色 线表示掠射角小于7.5°的本征声线和到达结构,红 色表示掠射角大于7.5°小于15°的本征声线和到达 结构,其他掠射角对应的声线和到达结构用黑色线 表示,结果表明两种收发情况下掠射角均在15°以 内。本文中的掠射角特指声线与海底相互作用时对 应的掠射角,7.5°以内称为小掠射角,7.5°~15°之间称为大掠射角。

从图9可以看到,上发下收时,大掠射角本征声 线数量远大于小掠射角声线,而下发下收时的小掠 射角本征声线数量更多。小掠射角声线具有更高的 幅度,因此图3(b)中下发下收时的传播损失均值远 小于图3(a)中上发下收的情况。由图8(a)可见,声 源频率为500 Hz时,大掠射角声线对应更大的海底 反射损失标准差,因此图3(a)中下发下收时传播损 失的分布标准差更大。





对比图5中上发下收和下发下收两种情况,通 过Bellhop射线模型计算不同接收距离处掠射角 度。当收发距离在20km以内时,各个环境因素不 确定性对公式(14)中的掠射角度和阻抗等都具有 一定程度的影响,且影响程度随距离增加逐渐减小。

在20 km以后较远的传播距离上,声线到达结构与图9中的计算结果较类似。上发下收时,温跃层中声速的负梯度使得声线向海底传播,声源深度的变化会显著地改变掠射角的分布位置,从而造成海底反射损失的较大波动,所以在图5(a)中20 km以后声源深度的敏感度指数较大。

对于下发下收的情况,远距离处声源深度的变

化会一定程度影响小掠射角声线的分布,从图8中 提取5°和11°这两个典型掠射角对应的标准差、均 值与频率的关系,如图10所示。观察图8和图10可 以看到,不同频率声源在小掠射角下的海底反射损 失波动比大掠射角声线的反射损失波动小很多,因 此声场分布的不确定性程度主要取决于大掠射角 声线海底反射损失波动。低频段内大掠射角对应的 海底反射损失要比高频段小很多,声能量可以传播 到较远距离处,所以低频段内海底沉积层对声场分 布的不确定性影响程度最大。随着声源频率的增大, 海底反射损失的均值也逐渐增加,大掠射角的声线 很难到达远距离处,因此小掠射角的声线贡献了主 要的声场能量,此时声源深度的影响程度也逐渐增强,对应图6中随频率变化的环境参数敏感度。



图 10 掠射角为5°和11°时海底反射损失标准差、 均值与频率的关系

Fig. 10 The relationship between the standard deviation, mean value and frequency of bottom reflection loss

## 3 结论

本文将Sobol敏感度指标的计算与混沌多项式 展开方法相结合,根据设定的"水下负梯度温跃层" 信道模型,利用Q范数约束的双曲截断方案来减少 多项式展开项数,有效地分析了8个海洋环境参数 及其交互效应对不同声源位置、传播距离和声源频 率的声场不确定性分布的影响及Sobol敏感度指数 代表的影响程度,计算结果表明:(1)对于20 km以 内较近的传播距离内,上发下收和下发下收两种情 况下各个环境参数都对声场不确定性分布有较大 的影响,在20 km后的远场,沉积层声速是声场不确 定性分布的最主要贡献,同时上发下收时,声源深度 对声场分布也有较大的影响。其他环境参数的影响 基本可以忽略。(2)对于下发下收的情况,声源深度 对声场分布的影响随着频率的升高不断增加,与之 相反的是沉积层声速敏感度指数逐渐降低。

最后利用射线理论从海底反射的角度解释了 各个环境因素影响程度差异的具体原因。理论分析 与计算结果较吻合,结果表明该方法可以有效地处 理大量随机环境参数情况下的声场不确定性量化 问题,并识别出对传播损失最有影响力的参数。在 声呐应用中,根据实际使用条件,综合考虑环境参 数对声场分布的敏感性,忽略敏感度较低的环境参 数的变化性、关注对声场不确定性影响较大的环境 参数,可更精确预报和提升声呐系统的性能。下一 步将在更加复杂的情况,如三维海洋环境和内波等 水平变化环境,对文本所用分析方法的有效性进行 验证。

参考文献

- Stojanovic M, Preisig J. Underwater acoustic communication channels: propagation models and statistical characterization[J]. IEEE Communications Magazine, 2009, 47(1): 84–89.
- [2] Zhou Y, Song A, Tong F. Underwater acoustic channel characteristics and communication performance at 85 kHz[J]. The Journal of the Acoustical Society of America, 2017, 142(4): 350–355.
- [3] Lermusiaux P F J, Xu J, Chen C F, et al. Coupled ocean-acoustic prediction of transmission loss in a continental shelfbreak region: predictive skill, uncertainty quantification, and dynamical sensitivities[J]. IEEE Journal of Oceanic Engineering, 2010, 35(4): 895–916.
- [4] Kessel R T. A mode-based measure of field sensitivity to geoacoustic parameters in weakly range-dependent environments[J]. The Journal of the Acoustical Society of America, 1999, 105(1): 122–129.
- [5] Dosso S E, Giles P M, Brooke G H, et al. Linear and nonlinear measures of ocean acoustic environmental sensitivity[J]. The Journal of the Acoustical Society of America, 2007, 121(1): 42–45.
- [6] Dosso S E, Morley M G, Giles P M, et al. Spatial field shifts in ocean acoustic environmental sensitivity analysis[J]. The Journal of the Acoustical Society of America, 2007, 122(5): 2560–2570.
- [7] James K R, Dowling D R. A method for approximating acoustic-field-amplitude uncertainty caused by environmental uncertainties[J]. The Journal of the Acoustical Society of America, 2008, 124(3): 1465–1476.

- [8] Brooke G H, McCammon D F, Giles P M, et al. Geoacoustic parameter sensitivity and interaction study[R]. Canada: Contract Report of Defence R & D, 2007: 4.
- [9] Dosso S E, Morley M, Giles P M, et al. The effects of spatial field shifts in sensitivity measures[R]. Canada: Contract Report of Defence R & D, 2008: 58.
- [10] James K R. Uncertainty in underwater acoustic field prediction[D]. Michigan: The University of Michigan, 2009: 125–127.
- [11] Finette S. A stochastic representation of environmental uncertainty and its coupling to acoustic wave propagation[J]. The Journal of the Acoustical Society of America, 2006, 120(5): 2567–2579.
- [12] Khine Y Y, Creamer D B, Finette S. Acoustic propagation in an uncertain waveguide environment using stochastic basis expansions [J]. Journal of Computational Acoustics, 2010, 18(4): 397–441.
- [13] 程广利,张明敏.不确定水声场随机多项式系数解法研究 [J]. 哈尔滨工程大学学报, 2013, 33(1): 21-25.
  Cheng Guangli, Zhang Mingmin. On the polynomial chaos coefficients for uncertain underwater acoustic field[J]. Journal of Harbin Engineering University, 2013, 33(1): 21-25.

- [14] Gerdes F, Finette S. A stochastic response surface formulation for the description of acoustic propagation through an uncertain internal wave field[J]. The Journal of the Acoustical Society of America, 2012, 132(4): 2251–2264.
- [15] James K R, Dowling D R. Pekeris waveguide comparisons of methods for predicting acoustic field amplitude uncertainty caused by a spatially uniform environmental uncertainty (L)[J]. The Journal of the Acoustical Society of America, 2011, 129(2): 589–592.
- [16] Mi Y, Zheng H, Lee H P. A domain decomposition method for stochastic analysis of acoustic fields with hybrid and localized uncertainties[J]. Wave Motion, 2018, 83: 121–133.
- [17] Crestaux T, Mattre O L, Martinez J M. Polynomial chaos expansion for sensitivity analysis[J]. Reliability Engineering & System Safety, 2009, 94(7): 1161–1172.
- [18] Sobol I M. Sensitivity estimates for nonlinear mathematical models[J]. Mathematical Modelling and Computational Experiments, 1993, 1(4): 407–414.
- [19] Hamilton E L. Compressional-wave attenuation in marine sedment[J]. Geophysics, 1972, 37(4): 620.
- [20] Jensen F B, Kuperman W A, Porter M B, et al. Computational ocean acoustics[M]. New York: Springer, 2011.