

◇ 研究报告 ◇

## 点簧簧片振动特性数值分析\*

朱广平<sup>†</sup> 王 成 门 伟 赵宿辰

(哈尔滨工程大学水声工程学院 哈尔滨 150001)

**摘要:** 簧片是笙等传统簧管类乐器的核心部件之一。通过点簧工艺可调整簧片振动频率,点簧簧片的差异对整体乐器的声音效果具有重要影响。针对点簧簧片的振动特性问题,对其建立非均匀截面并具有质量负载的振动模型,采用有限元方法计算点簧簧片的固有频率。大量算例分析了点簧质量、位置以及簧片的边界条件对振动频率的影响,研究发现:若点簧质量不变,位置越靠近自由端调整频率越大,但同时应考虑对高阶频率的激发避免影响音色;若位置相同,点簧质量与频率改变近似成正比,由此可方便调整簧片振动频率。该研究结果初步揭示了点簧簧片振动规律,可为制作、复原传统簧管类乐器中簧片的点簧工艺过程提供物理依据。

**关键词:** 点簧簧片;振动;频率;有限元

**中图法分类号:** O42

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1000-310X(2021)03-0433-07

**DOI:** 10.11684/j.issn.1000-310X.2021.03.015

## Numerical analysis of the vibration of metallic reed with mass

ZHU Guangping WANG Cheng MEN Wei ZHAO Suchen

(College of Underwater Acoustic Engineering, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China)

**Abstract:** The reed is one of the core parts of Chinese traditional reed instruments such as Sheng. The vibration frequency of the reed can be adjusted by the metallic reed with mass technology, so the difference of the metallic reed with mass has an important influence on the sound effect of the whole instrument. Aiming at the vibration characteristics of metallic reed with mass, a vibration model with non-uniform cross section and mass load was established, and the natural frequency of metallic reed with mass was calculated by finite element method. A large number of examples were used to analyze the influence of the mass, position and boundary conditions of the reed on the vibration frequency. The results show that if the mass remains unchanged, the closer the position is to the free end, the higher the adjustment frequency will be. However, at the same time, the excitation of the high frequency should be considered to avoid affecting the timbre. If the position is the same, the mass is proportional to the change of frequency, thus the vibration frequency of reed can be adjusted conveniently. The results of this study preliminarily reveal the vibration rule of metallic reed with mass, which can provide a physical basis for making and restoring the metallic reed with mass process of reed in traditional reed instruments.

**Keywords:** Metallic reed with mass; Vibration; Frequency; Finite element

2020-08-04 收稿; 2020-12-06 定稿

\*中央高校基本科研业务费专项 (GK2050260166)

作者简介: 朱广平 (1980-), 男, 黑龙江人, 博士, 副教授, 研究方向: 声与振动理论。

<sup>†</sup>通信作者 E-mail: guangpingzhu@hrbeu.edu.cn

## 0 引言

笙是中国传统民间乐器,在中国古代乐器家族中占有重要的一席之地。不仅如此,17世纪笙等簧管乐器传入欧洲,为西方音乐家、乐器制造家改进簧管类乐器,尤其是对簧管乐器的关键部件——簧片的改进起到了积极的作用,从而为创制、改进风琴、口琴等新的簧管乐器做出了重要贡献<sup>[1]</sup>。笙的音高除与管长有关外<sup>[2]</sup>,还主要与簧片尺寸、厚度以及点簧技术有关。中国人早期制作簧片常采用芦苇或竹片,由于此类材料耐用性差,后期主要采用铜等其他金属材料制作簧片,如汉代马王堆出土的多枚两千多年前的金属簧片至今保存完好<sup>[3]</sup>。古代金属簧片的制作技艺之高,还体现在对簧片的点簧(又作典簧、点绿)技术上。点簧就是在簧片某些位置上或多或少的点蜡或锡,以便调整其音高。从曾侯乙墓出土的战国初年的笙来看,古人通过实践已经掌握了娴熟的点簧技术,虽然他们并未清楚其中的物理原理<sup>[1]</sup>。簧片的基频,即第一阶固有频率,决定簧片振动发声的音高,而各阶共振频率决定其音色。因此簧片的点簧工艺中,点簧的位置及质量的大小等因素对簧片的固有频率有重要影响,这也是中国传统乐器制作家通过大量实践沉淀得到的关键技艺<sup>[4]</sup>。然而遗憾的是,到目前为止,点簧过程是精通制笙匠人通过大量的实践经验进行调整,极少专门的定量分析点簧簧片振动问题。因此,研究点簧簧片振动规律对科学认识及制作、复原笙等中国传统簧管类乐器具有实际意义。

一般地,簧片近似瘦长的楔形,厚度远小于其长度,其截面面积沿长度方向变小。簧片的振动可近似为非均匀截面的悬臂梁振动问题<sup>[5]</sup>。对于非均匀梁的振动问题一直以来都受到了广泛关注<sup>[6-8]</sup>。当考虑到经过点簧处理后,簧片的质量存在突变,需要将点簧后的金属簧片建模为具有质量负载的非均匀梁振动模型。此模型类似在桥梁动力学中具有质量负载的非均匀梁振动模型,对此闫维明等<sup>[9]</sup>基于Bernoulli-Euler梁理论建立了带任意附加质量的变截面弹性支承梁动力特性的简化计算模型,该模型能够将梁的变系数微分方程转化为线性代数方程组的形式,进而求得解析解。然而,从数学的角度看,非均匀截面梁的振动通常为复杂的变系数微分方程形式,其中仅有个别结构是可以获得振动方

程的解析解形式,而绝大部分情况均是无法获得其精确的解析解,因此计算中常采用数值解法<sup>[10-11]</sup>。近年来工业中对功率超声源簧片<sup>[12]</sup>的振动问题,采用有限元分析方法<sup>[13-14]</sup>进行数值分析,这对精确定量分析传统簧管类乐器的点簧簧片的振动问题也具有借鉴意义。

本文针对非均匀截面的点簧金属簧片振动问题开展研究,对其建立非均匀截面并具有质量负载的振动模型。由于该模型的非均匀性,难以获得解析解形式,为了精确定量分析,采用有限元方法对模型进行数值求解,通过算例定量分析点簧位置及质量、边界条件对簧片振动特性的影响,揭示点簧簧片振动规律,为制作、复原中国传统簧管类乐器提供物理依据。

## 1 点簧金属簧片的振动方程及边界条件

### 1.1 振动方程

对实际模型进行抽象:(1)由于簧片形状较为狭长,点簧区域尺度相较于簧片宽度相近而相较于簧片长度方向很小,因此点簧物质可抽象为簧片上的集中质量负载;(2)考虑到金属簧片厚度相对于长度很薄,由振动理论可知,波长远大于厚度,且截面面积沿长度方向变化,因此,采用集中质量负载的变截面Bernoulli-Euler梁模型描述点簧金属簧片的振动。振动方程为

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EI(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \eta(x, t) \right] + m_0 \delta(x - x_0) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \eta(x, t) + \rho A(x) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \eta(x, t) = 0, \quad (1)$$

式(1)中, $E$ 为杨氏模量, $I(x)$ 是沿着 $x$ 轴变化的转动惯量, $\delta(x)$ 为狄拉克函数, $m_0 \delta(x - x_0)$ 表示在 $x_0$ 位置有一集中质量, $A(x)$ 为梁在 $x$ 位置的横截面积, $\rho$ 为密度。

设方程解的形式为 $\eta(x, t) = u(x)T(t)$ ,分离变量得

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} T(t) + \omega^2 T(t) = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EI(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x) \right] - \omega^2 \rho A(x) u(x) - \omega^2 m_0 \delta(x - x_0) u(x) = 0, \quad (3)$$

式(3)中, $\omega^2$ 为该方程的固有角频率。

一般的典型簧片呈狭长的楔形。因此, 设簧片宽度沿长度 ( $x$  方向) 的变化为

$$b(x) = b_0 - \gamma x, \quad (4)$$

其中,  $b_0$  是初始宽度,  $\gamma$  是斜边的变化斜率。簧片截面是矩形, 所以式 (3) 中  $A(x) = h \cdot b(x)$ ,  $h$  为簧片的厚度。

$u$  为垂直梁的中性面方向上的位移,  $y$  为梁厚度方向的坐标。非均匀截面上力矩和转动惯量分别为

$$M = EI(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (5)$$

$$I(x) = \int_{A(x)} y^2 dA. \quad (6)$$

该方程为变系数微分方程, 除  $I(x)$ 、 $A(x)$  为几种比较特殊的函数形式外, 方程的解很难得到解析解形式。因此, 下面采用有限元方法对上述振动方程描述的有质量加载的变截面点簧金属簧片的振动模型, 通过算例求解并分析其固有频率随点簧位置、点簧质量以及不同边界条件下的变化规律。

## 1.2 边界条件

簧片一般固定在簧管端口, 理想情况下可认为簧片一端固定不动, 另一端自由, 其边界条件为

$$u|_{L=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{L=0} = 0. \quad (7)$$

然而, 在实际中使用的材料并非能做到严格固定, 因此不能当作固定不动边界, 而应近似认为是弹簧支撑边界, 其边界条件为

$$F = -k_p u, \quad M = -k_\theta \theta, \quad (8)$$

其中,  $k_p$  和  $k_\theta$  为刚度系数。

将簧片上的点簧质量看作为质量负载条件, 其对簧片的力和力矩作用可描述为

$$F = -m_0 \omega^2 u + j\omega \alpha_{dm} m_0 u, \quad (9)$$

$$M = -\omega^2 I \theta + j\omega \alpha_{dm} I \theta, \quad (10)$$

其中,  $\alpha_{dm}$  为损耗系数,  $m_0$  为点簧质量。由于点簧质量相对于整个狭长簧片只占很小一段, 可以看作集中质量负载, 此时力矩可为 0; 当不考虑质量负载与金属簧片之间的能量损耗时, 点簧质量负载可简化为  $F = -m\omega^2 u$ ,  $M = 0$ 。

## 2 点簧簧片振动固有频率计算

采用有限元方法建立非均匀截面点簧簧片振动模型并求解其固有频率方程。将簧片离散化, 在单元上位移可由形函数及节点位移近似  $\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{U}$ , 其中  $\mathbf{N}$  为形函数向量,  $\mathbf{U}$  为单元节点位移向量, 速度为  $\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{N}\dot{\mathbf{U}}$ ,  $\dot{\mathbf{U}}$  为单元节点速度向量。

采用拉格朗日方程进行单元分析, 整合所有单元后建立点簧簧片的运动方程组, 从而得到其固有方程进而计算固有频率。簧片较小较薄不计损耗, 认为是无损耗的自由振动, 拉格朗日方程为

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{u}}} \right) + \frac{\partial \Lambda}{\partial \mathbf{u}} = 0, \quad (11)$$

其中,  $T$  为动能,  $\Lambda$  为势能,  $\dot{\mathbf{u}}$  为速度。

梁单元的动能为

$$T^{(e)} = \int_L \frac{1}{2} \rho A(x) \dot{\mathbf{u}}^2 dx, \quad (12)$$

其中,  $A(x) = h \cdot b(x)$ 。

$$\begin{aligned} \Lambda^{(e)} &= \frac{E \cdot I(x)}{2} \int_L \left( \frac{d^2(\mathbf{N}\mathbf{U})}{dx^2} \right)^2 dx \\ &= \frac{E \cdot I(x)}{2} \int_L \mathbf{U}^T \mathbf{D}^T \mathbf{D} \mathbf{U} dx. \end{aligned} \quad (13)$$

将各个单元的刚度矩阵和质量矩阵整合并带入到拉格朗日方程中, 并考虑到簧片上点簧的集中质量负载, 得到整个簧片的运动方程:

$$(\mathbf{M} + m_0) \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K} \mathbf{U} = 0. \quad (14)$$

从而得到特征方程为

$$[\mathbf{K} - \lambda(\mathbf{M} + m_0)] \mathbf{U} = 0. \quad (15)$$

由于  $\lambda = \omega^2$ , 进而可求解出各阶固有角频率  $\omega_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots$ )。

## 3 算例分析

### 3.1 点簧对簧片振动基频和谐频的影响

古人常采用熟铜作为金属簧片的材料, 因此算例中取杨氏模量  $E = 11^{10}$  Pa, 密度  $\rho = 8700$  kg/m<sup>3</sup>。算例中取簧片长 23.5 mm, 宽度变化曲线为  $7.5 - 0.016x$ ,  $x$  为长度坐标, 厚 0.7 mm, 点簧质量 0.2 g, 点簧位置在簧片的自由端。计算前 6 阶固有频率如表 1 所示, 并与未点簧的簧片进行了对比。

表 1 点簧与未点簧簧片固有频率对比  
Table 1 The natural frequency of the reed  
has an added mass versus no added mass

|      | (单位:Hz) |        |       |        |       |       |
|------|---------|--------|-------|--------|-------|-------|
|      | 第 1 阶   | 第 2 阶  | 第 3 阶 | 第 4 阶  | 第 5 阶 | 第 6 阶 |
| 未点簧  | 237.58  | 1472.8 | 4111  | 8050.6 | 13308 | 19889 |
| 点簧   | 234.95  | 1457.9 | 4073  | 7982.6 | 13205 | 19748 |
| 两者之差 | 2.63    | 14.9   | 38    | 68     | 103   | 141   |

由表 1 可知,点簧簧片的各阶固有频率均小于未点簧簧片,并且随着阶数的增加,频率差从几赫兹变化到上百赫兹,两者之间的频率差距越发显著。可见点簧后降低了簧片的基频,尤其对簧片高阶谐波的影响更加显著。由此可知,若与管腔声耦合后,点簧工艺的差异、优劣将对管乐器的音高、音色、音质产生重要影响。

3.2 点簧位置及质量的影响

簧片的基频(第 1 阶固有频率)决定簧片振动发声的音高,而各阶共振频率影响其音色。而点簧的位置及质量的大小等因素对簧片的固有频率有重要的决定性作用,影响整个乐器品质的优劣。下面通过算例来定量分析点簧位置及质量对簧片的振动特性的影响。

算例中簧片的几何形状与尺寸同 3.1 节中的模型,通过改变点簧位置及质量大小计算各阶固有频率,改变点簧位置从簧片的固定端(0 mm)到自由端(23.5 mm),其步长 1 mm;改变点簧质量,范围从 0.05~0.3 g,步长 0.01 g。计算结果如图 1~图 5 所示。

图 1 为在不同点簧质量及位置下计算得到的第 1 阶固有频率。伪彩图中的色彩对应计算得到的频率值。由图 1 可知,高频区在左下角而低频区在右上角,其含义为点簧质量越轻或位置越靠近固定端,簧片的振动基频越高。相反的,点簧质量越重或位置越靠近自由端则簧片的振动基频越低。

图 2 为不同点簧质量时的第 1 阶固有频率随点簧位置变化的计算结果,其更清晰地反映出图 1 中的变化规律。比较图 2 中各曲线可知,当点簧质量较大时可调整基频的范围较大。因此,在需要较大调整簧片基频的场合,建议采用密度较大的材料作为点簧材料,通过选择合适的点簧位置,从而方便达到调音目的。

为了认识不同位置处点簧质量对基频的影响,计算不同位置处点簧第 1 阶频率随点簧质量变化,

结果如图 3 所示。图中位置 1、位置 2 和位置 3 分别对应自由端、距自由端 1/4 和 1/2 处。由图 3 可知,在同一位置处频率随点簧质量近似为线性关系,并且点簧位置越靠近自由端其斜率越大。因此在靠近自由端对簧片进行点簧不但可调频率范围大,而且可以通过点簧质量与频率简单的线性关系进行调整,使得调整频率更加方便。

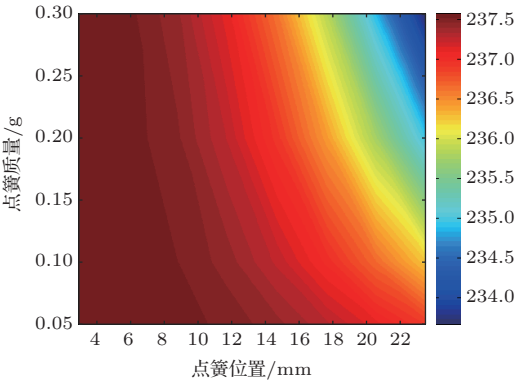


图 1 不同点簧质量和位置下的第 1 阶频率  
Fig. 1 The first frequency under different mass and position case

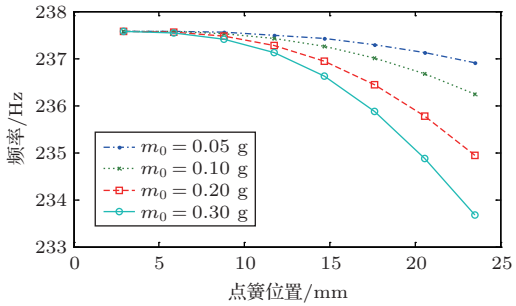


图 2 不同点簧质量的第 1 阶频率随点簧位置变化  
Fig. 2 The first frequency of the different mass at varies with the position

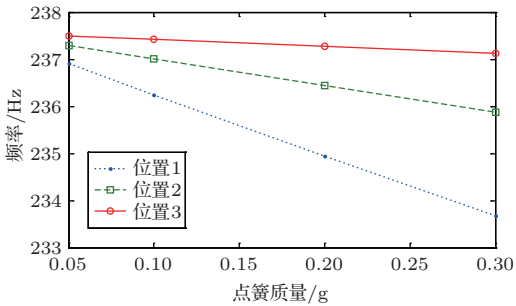


图 3 不同位置处点簧第 1 阶频率随点簧质量变化  
Fig. 3 The first frequency of the different position at varies with the mass



下面分析点簧对高阶谐频的影响,它对乐器的音色有重要影响。计算中的簧片模型与上例同,计算得到第2阶和第3阶的固有频率随点簧位置和质量的变化的结果。图4、图5与图1中的基频相比,高阶谐频的变化具备两个显著特点:一是谐频随点簧位置和质量的变化的变化呈现类周期性的变化规律;二是簧片在高阶振动时会出现节点,即在该点处振动位移为零静止不动,当点簧到该位置时对该阶谐频无影响。由此可见,当点簧调整基频频率时,也需兼顾其高阶谐频的变化,否则可能会导致整个乐器音色的变化。因此,在点簧过程中对点簧质量和位置可进行优化或采用多处点簧得方法,从而使乐器簧片达到最佳的声音效果。

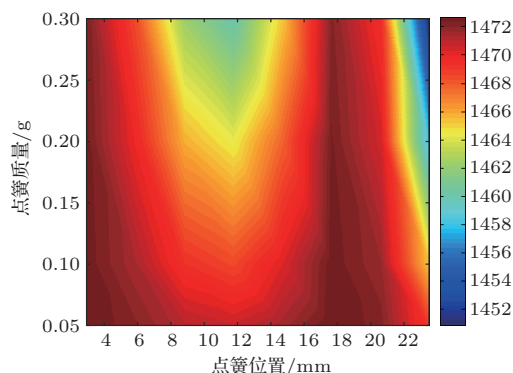


图4 不同点簧质量和位置下的第2阶频率

Fig. 4 The second frequency under different mass and position case

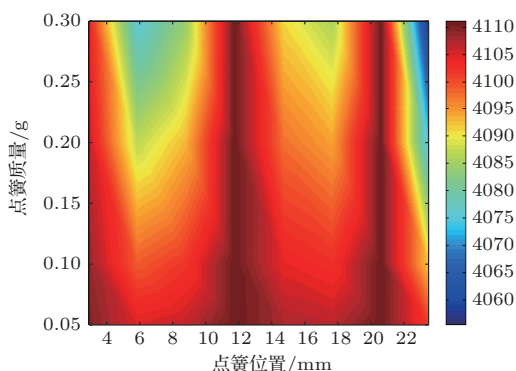


图5 不同点簧质量和位置下的第3阶频率

Fig. 5 The third frequency under different mass and position

进一步计算了不同点簧质量和位置下的第4阶到第9阶的频率结果,如图6所示。其特点与第2、第3阶频率相似,谐频随点簧位置和质量的变化的变化呈现类周期性的变化规律,并且随着阶数的增加振动节点增多。

由振动理论可知,对于某阶振动模式若增加等效质量,将导致其等效机械品质因数变大,其振幅值变大。然而,由于点簧物质质量相比于簧片很小,当点簧位置处于簧片某阶模式的节点位置时,将不会改变该阶模式的等效质量,因此不会改变其幅值。因此,当点簧调整簧片的频率时,只需合理选择点簧位置,例如将点簧位置选择在某阶模式的节点附近,即可不会增强该阶频率的振动强度,起到间接的抑制作用。

### 3.3 不同边界条件下点簧簧片振动特性

古乐器在固定簧片时,采用插入凹槽并用细绳固定的方法,在实际中具有一定的柔性,并非能达到理想固定情况,因此实际中的边界条件应是具有一定刚度系数的弹性的边界条件。由振动理论可知,边界条件的改变对点簧簧片的振动特性也有显著的影响,因此有必要了解其对簧片振动特性的作用,从而为实际的簧片调音提供理论依据。

下面算例模型与3.1节相同,但边界条件变为弹性边界条件,并与刚性边界条件的计算结果进行了对比,计算结果如图7所示,其中 $k_1$ 、 $k_2$ 是式(8)中的刚度系数 $k_p$ 和 $k_\theta$ 。由图7可知,与固定边界这种理想情况相比,弹性边界时簧片固有频率降低,并且随着弹性系数减小固有频率将变得更低。可见,固定簧片的材料与方式会影响点簧簧片的固有频率,固定材料和方式柔性越大越降低其固有频率。此外,对已固定好的簧片进行点簧工艺时,应当根据簧片的固定方式及松紧程度,点簧位置应尽量向固定端靠近,才能达到预期频率调整的目的,例如在本算例中要将簧片调整到236.9 Hz振动频率,理想边界条件时点簧在簧片14.9 mm,而弹性边界时为13.1 mm和6.2 mm。

### 3.4 不同斜率簧片振动特性及点簧的影响

簧片近似为瘦长楔形,不同斜率的簧片点簧后的影响也不相同。在这里通过算例进一步了解不同斜率簧片对点簧后固有振动的特点。算例模型同3.1节,改变式(4)中的斜率 $\gamma$ ,计算得到不同斜率下的点簧簧片的基频,如图8所示。由图8可知,斜率变大,即簧片削尖后固有频率有所提高,但是固有频率随点簧位置变化的曲线趋势基本相同,由此可见,即便是在不同斜率簧片上点簧,通过改变点簧位置调整频率的规律是基本一致的,也就是说虽然形状斜率不同但是调整点簧位置改变频率的规律基本不变,即3.2节中的规律仍然是适用的。

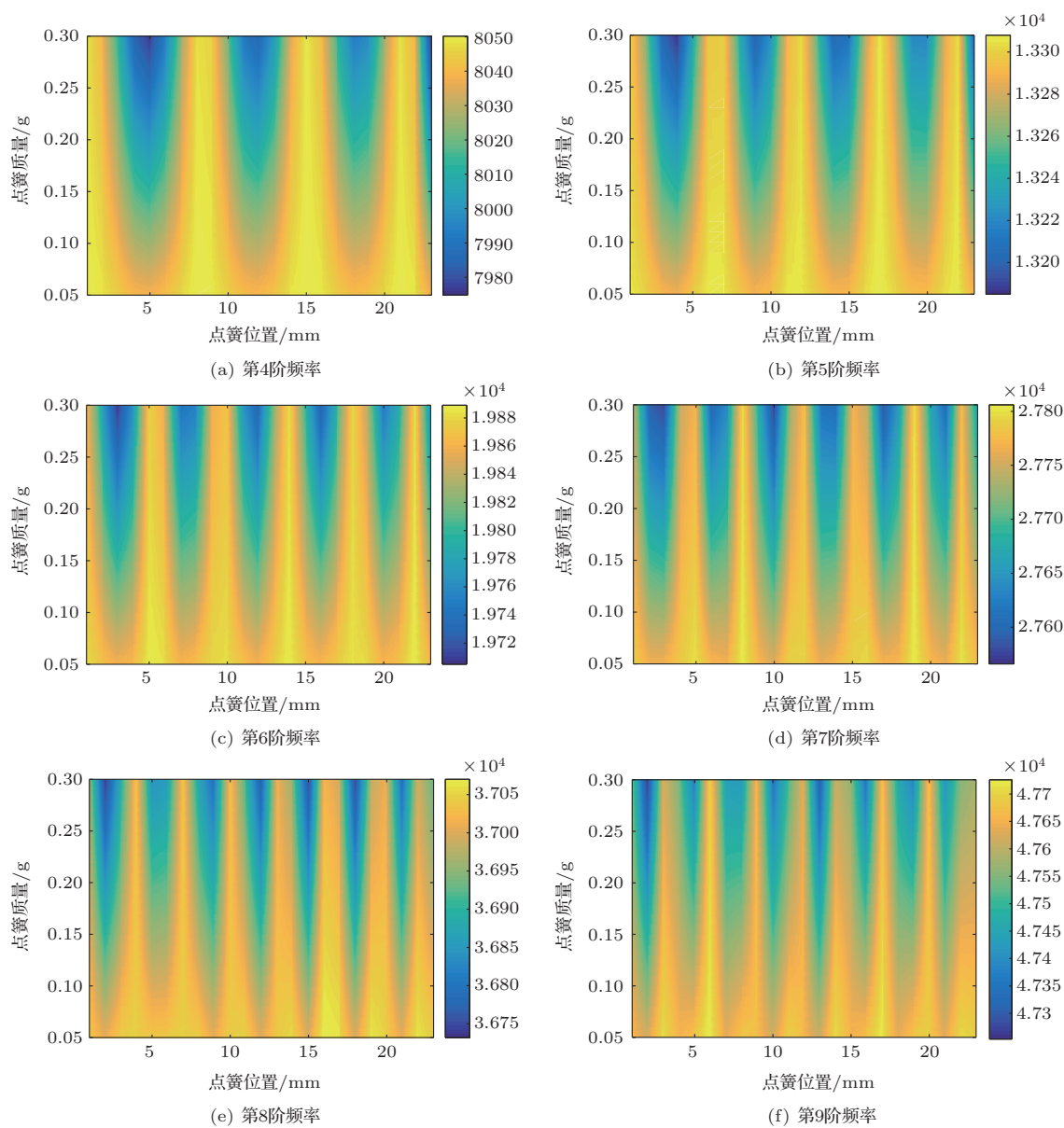


图6 不同点簧质量和位置下的第4阶到第9阶频率

Fig. 6 The 4th to 9th frequency under different mass and position case

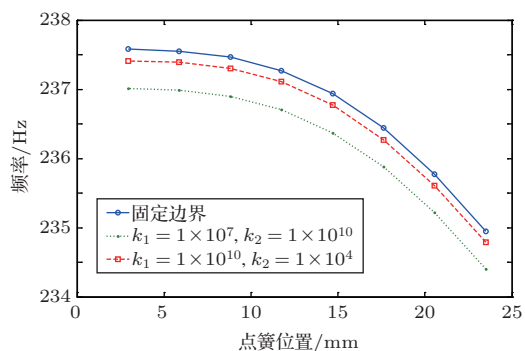


图7 不同边界条件下点簧簧片的基频

Fig. 7 The fundamental frequency of metallic reed with mass under different boundary conditions

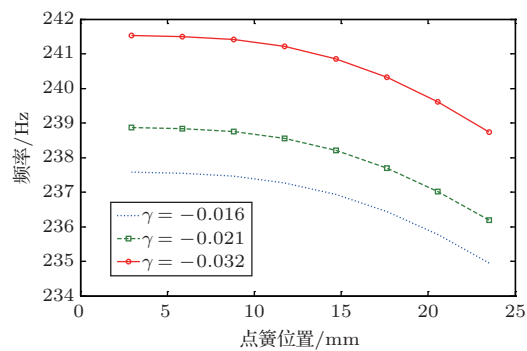


图8 不同斜率下的点簧簧片的基频

Fig. 8 The fundamental frequency of metallic reed with mass at different slopes

## 4 结论

针对非均匀截面的点簧金属簧片的振动问题,建立了非均匀截面并具有质量负载的振动模型,采用有限元方法对模型固有频率进行求解,通过算例定量分析了点簧质量、位置及边界条件对点簧簧片振动的影响。总结算例结果,得到如下结论:

(1) 若需要调整的频率较大时,可采用密度较大的材料作为点簧材料,并且点簧位置应向簧片自由端靠近。

(2) 点簧位置不变时,频率随点簧质量近似为线性关系。因此可以通过点簧质量与频率简单的线性关系进行调整,使得调整频率更加方便。

(3) 当点簧调整基频频率时,需兼顾其高阶谐频的变化,因此点簧过程中对点簧质量和位置进行优化或采用多处点簧方法,从而使乐器簧片达到最佳的声音效果。此外,将点簧位置选择在某阶模式的节点附近,可不会增强该阶频率的振动强度,起到间接的抑制作用。

(4) 依据簧片的固定方式及松紧程度,调整点簧位置时应尽量向固定端靠近,才能达到预期频率调整的目的。

本文只分析了点簧簧片的固有振动特性,然而管乐器腔体中的空气振动对簧片具有耦合作用,后续将进一步分析受管腔的耦合作用下点簧簧片的振动特性。此外,由于簧片各高次振动模态的振动幅度大小直接影响簧片振动乐器的“音色”与“和声的纯洁性”,因此如何控制簧片各高次振动模态的振动幅度也是后续研究的一个重要方向。

## 参 考 文 献

- [1] 戴念祖. 中国声学史[M]. 石家庄: 河北教育出版社, 1994.
- [2] 陈通. 笙的声学[J]. 声学学报, 1996, 2(4): 324-331.  
Chen Tong. Acoustics of Chinese woodwind reed instrument Sheng[J]. Acta Acustica, 1996, 2(4): 324-331.
- [3] 柳羽. 时过十余载在长沙马王堆汉墓出土文物中发现金属簧片[J]. 乐器, 1986(5): 6.
- [4] 庄晓庆. 民间乐器作坊及传统制笙工艺——天津静海小黄庄制笙作坊的调查与研究[D]. 北京: 中国艺术研究院, 2007.
- [5] 王建华, 赵帅, 刘文营. 口琴簧片振动频率的理论及实验研究[J]. 大学物理实验, 2011, 24(5): 29-31.  
Wang Jianhua, Zhao Shuai, Liu Wenying. Theoretical and experimental studies of the vibration frequency of harmonica reed[J]. Physical Experiment of College, 2011, 24(5): 29-31.
- [6] Wang Y, Liu H. Dynamic analysis of a mass traveling on a simply supported nonhomogeneous beam composed of transversely embedded periodic arrays[J]. Journal of Mechanics of Materials and Structures, 2019, 14(2): 237-257.
- [7] Koroma S G, Hussein M F M, Owen J S. Vibration of a beam on continuous elastic foundation with nonhomogeneous stiffness and damping under a harmonically excited mass[J]. Journal of Sound and Vibration, 2014, 333(9): 2571-2587.
- [8] Huang Y, Yang L E, Luo Q Z. Free vibration of axially functionally graded timoshenko beams with non-uniform cross-section [J]. Composites Part B: Engineering, 2013, 45(1): 1493-1498.
- [9] 闫维明, 石鲁宁, 何浩祥, 等. 带任意附加质量的变截面弹性支承梁动力特性的解析解[J]. 工程力学, 2016, 33(1): 47-57.  
Yan Weiming, Shi Luning, He Haoxiang, et al. Analytic solution of dynamic characteristics of non-uniform elasticity Supported beams with arbitrary added masses [J]. Engineering Mechanics, 2016, 33(1): 47-57.
- [10] 付豪, 姜根山. 基于FW-H方程的Hartmann哨辐射声场数值研究[J]. 应用声学, 2018, 37(1): 180-186.  
Fu Hao, Jiang Genshan. Numerical calculation of Hartmann whistle radiation acoustic field based on FW-H equation[J]. Journal of Applied Acoustics, 2018, 37(1): 47-57.
- [11] 张立达. 非均匀变截面梁(柱)自由振动的差分法求解[D]. 兰州: 兰州理工大学, 2010.
- [12] 罗曾义. X型簧片哨超声乳化强化器简介[J]. 应用声学, 2008, 27(5): 385.
- [13] 李凤鸣, 吴胜举, 邸惠芳, 等. 对称式不同形状簧片的振动特征[J]. 陕西师范大学学报(自然科学版), 2014, 42(5): 36.  
Li Fengming, Wu Shengju, Di Huifang, et al. Vibration characteristics of symmetric diffom reeds[J]. Journal of Shanxi Normal University (Natural Science Edition), 2014, 42(5): 36.
- [14] 李凤鸣, 吴胜举, 许龙, 等. 基于Workbench平台的簧片哨发声机理及特征[J]. 陕西师范大学学报(自然科学版), 2018, 46(5): 39-44.  
Li Fengming, Wu Shengju, Xu Long, et al. Study on the mechanism and characteristics of reed whistle based on Workbench platform[J]. Journal of Shanxi Normal University (Natural Science Edition), 2018, 46(5): 39-44.