◇ 研究报告 ◇

理想浅海波导中声场奇异点与声源深度的关系*

王泽茜 李 建† 张 振 顾明宇

(河海大学物联网工程学院 常州 213002)

摘要:为了有效利用声场奇异点蕴含的声源参数信息,研究了在理想浅海波导中,远场不同邻阶模态组的声场 奇异点与声源深度之间的关系。推导计算了典型浅海声源声场的邻阶模态组奇异点位置,并通过仿真对奇异 点的分布进行分析,结果显示邻阶模态组的阶数和阶差越大,奇异点分布越复杂。进一步研究发现,邻阶模态 组第一组奇异点的深度和声源深度之间存在联系,并且基于奇异点与声压场的对应关系,在获得准确模态分 布的前提下,可以通过两个邻阶模态组的第一组奇异点深度逆运算获得对应声源深度信息,也可以通过第一 组奇异点深度反演获得声源深度信息。该文为获取浅海声源深度提供了思路。 关键词:邻阶模态组;奇异点;声源深度;逆运算;反演 中图法分类号:TB525 文献标识码:A 文章编号:1000-310X(2023)01-0107-09

DOI: 10.11684/j.issn.1000-310X.2023.01.014

Relationship between singular points of the acoustic field in the ideal shallow waveguide and source depth

WANG Zexi LI Jian ZHANG Zhen GU Mingyu

(College of Internet of Things Engineering, Hohai University, Changzhou 213002, China)

Abstract: In order to make better use of the source information contained in the singular points, the relationship between the singular points of different adjacent mode groups in the far field and the depth of the source in the ideal shallow waveguide is studied. This article derives the position of singular points of the typical shallow waveguide source acoustic field. The distribution of singular points is analyzed by simulation, and the results show that the larger the order and order difference of adjacent mode groups, the more complex the distribution of singular points. The further research found that there is a relationship between the depth of the first group of the adjacent mode groups and the depth of the source, based on the correspondence between the singular points and the acoustic field, and on the premise of obtaining an accurate modes distribution, the source depth can be obtained through the depth of the first group of singular points. It provides an idea about obtaining the depth of the source in the shallow waveguide.

Keywords: Adjacent mode group; Singular points; Depth of source; Inverse operation; Inversion

2022-05-20 收稿; 2022-11-07 定稿

^{*}水下机器人技术国家重点实验室基金项目(6142215200102),国家自然科学基金项目(12274113)

作者简介: 王泽茜 (1998-), 男, 陕西渭南人, 硕士研究生, 研究方向: 水声探测与定位。

[†]通信作者 E-mail: jian263@sina.com

0 引言

Waterhouse^[1]于1985年对水下能量流进行了 流线图绘制,并对声场能量流进行了跟踪,指出能量 流线附近有奇异点存在,为水声学提供了新的研究 思路。之后 Skelton^[2] 开展了平面波入射水中弹性 球形外壳实验,证明涡点处声压接近0Pa,鞍点处周 期平均振速接近0m/s。Mann^[3]通过几何论证的方 法,证明了奇异点是流函数的一个孤立极值。Chien 等[4] 通过微分方程描述流线强度的方式对二维声 场中奇异点附近的流线行为进行分析,在"鞍点处 周期内平均振速接近0m/s"的基础上指出:周期内 平均振速和声压相位差为奇数倍的π/2位置也会产 生鞍点。2001年, Eliseevnin等^[5]研究了浅海理想 波导中两个模态干涉产生的奇异点和声功率流,通 过声功率流图像和掠射角图像更直观地探讨了声 功率流特性。2008年,水下奇异点被真正检测到^[6]。 Shchurov^[7]于2019年通过检测奇异点的实验证明 了奇异点的分布,并且涡点会随着时间发生位移,这 有望成为未来获取海洋环境变化的信息来源。

本文在之前研究的基础上,通过仿真分析不同 条件下奇异点的分布特征,并将其与声源深度进行 联系,研究由奇异点获得声源深度的方法。本文主 要内容如下:(1)推导典型浅海中声源远场奇异点 位置的公式;(2)分析邻阶模态组(Adjacent mode group, AMG)的阶数、阶差与奇异点分布之间的关 系,进一步建立奇异点位置与声源深度之间的关系。 文中,AMG是在已激发模态中任选两个模态进行 组合的简称;阶数是AMG较低阶模态的阶数;阶差 是AMG两个模态阶数之差。

1 奇异点位置计算

2001年, Eliseevnin等^[5]研究了两个传播模态 在波导中产生的声功率流,推导了声源位于海底时 两个模态干涉产生的远场奇异点位置。本文将讨论 更为普遍的情况,即浅海中任意深度声源产生的远 场奇异点位置。为方便分析,假设海洋环境水平各 向同性,二维平面坐标系的水平轴为距离*R*,垂直轴 为深度*z*,以海底为深度参考零点。声源位于(0,*Z*₀) 处时,波导远场的声场势函数^[8]可表示为

$$\Psi = -\frac{V_0}{4\pi} j \frac{2\pi}{H} \sqrt{\frac{2}{\pi R}} \exp\left(-j\frac{\pi}{4}\right) \sum_{l=1}^m \frac{1}{\sqrt{\xi_l}} \cos\left(b_l Z_0\right)$$
$$\times \cos\left(b_l z\right) \exp\left[j\left(\xi_l R - \omega t\right)\right], \qquad (1)$$

其中, V_0 是声源强度,H为波导深度, ξ_l 和 b_l 分别对 应第l阶模态的水平波矢和垂直波矢, ω 是圆频率。 由声场势函数可得波导声压和振速:

$$P = -\rho \frac{\partial \Psi}{\partial t}; \quad V_R = \frac{\partial \Psi}{\partial R}; \quad V_z = \frac{\partial \Psi}{\partial z}.$$
 (2)

则水平和垂直周期内平均功率流密度向量为

$$\langle J_R \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(P V_R^* \right), \qquad (3)$$

$$\langle J_z \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\left(PV_z^*\right).$$
 (4)

对公式(3)和公式(4)进行计算,得到1阶模态 和q阶模态的水平和垂直周期内平均功率流密度向 量方程:

$$(R/B) \langle J_R \rangle$$

$$= \cos^2 (b_l Z_0) \cos^2 (b_l z) + \cos^2 (b_l Z_0) \cos^2 (b_q z)$$

$$+ (2 + \alpha) \cos (b_l Z_0) \cos (b_q Z_0) \cos (b_l z)$$

$$\times \cos (b_q z) \cos [(\xi_l - \xi_q) R], \qquad (5)$$

$$(R/B) \langle J_z \rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\xi_l \xi_q}} [b_q \cos (b_l z) \sin (b_q z)$$

$$- b_l \cos (b_q z) \sin (b_l z)] \sin [(\xi_l - \xi_q) R]$$

$$\times \cos (b_r Z_0) \cos (b_l Z_0) \qquad (6)$$

其中, $\alpha = \frac{\xi_l + \xi_q}{\sqrt{\xi_l\xi_q}} - 2$, $B = \frac{\rho\omega V_0^2}{4\pi H^2}$ 。要解得奇异点 位置 (R, z), 只需令 $\langle J_R \rangle = \langle J_z \rangle = 0$ 来求解 R和 z。 (a) 第一组奇异点

令公式(6)中sin[($\xi_l - \xi_q$) R] = 0, 解得第一 组奇异点水平坐标 R = $\frac{n\pi}{\xi_l - \xi_q}$ (n = 1, 2, ...), $\frac{\pi}{\xi_l - \xi_q}$ 即为场干涉结构周期的大小,将R代入公 式(5)得

 $(R/B) \langle J_R \rangle$ = $[\cos(b_l Z_0) \cos(b_l z) \pm \cos(b_q Z_0) \cos(b_q z)]^2$ $\pm \alpha \cos(b_l Z_0) \cos(b_q Z_0) \cos(b_l z) \cos(b_q z)$. (7)

为了简化运算,通过先估算再补偿的方式进行 求解。令公式(7)中 $\alpha = 0$,式子化为完全平方式, 进一步求解得

 $\cos(b_l Z_0) \cos(b_l z') + \cos(b_q Z_0) \cos(b_q z') = 0, \quad (8)$

$$\cos(b_l Z_0) \cos(b_l z') - \cos(b_q Z_0) \cos(b_q z') = 0.$$
(9)

公式 (8) 和公式 (9) 分別对应 $\sin[(\xi_l - \xi_q)R] = 0$ 时 $\cos[(\xi_l - \xi_q)R] = -1$ 和 $\cos[(\xi_l - \xi_q)R] = 1$ 的结果,对两式进行求解得到第一组奇异点的 深度估算坐标z'。设奇异点深度为z,且满足 cos($b_l z$) = cos[$b_l(z' + \Delta z)$]($\Delta z \in z \exists z \exists z'$ 的差值, 记为第一组估计器),将其联立公式(7)即可得到 Δz :

$$\Delta z \approx \pm \frac{\sqrt{\alpha}H}{6\pi \tan\left(b_l z'\right) \tan\left(b_l Z_0\right)}.$$
 (10)

第一组奇异点对应坐标为
$$(R, z' \pm \Delta z)$$
。

(b) 第二组奇异点

令公式(6)中 $b_q \cos(b_l z) \sin(b_q z) - b_l \cos(b_q z) \cdot \sin(b_l z) = 0$,解得第二组奇异点的深度坐标z(z 有 多组解),将其代入公式(5)得到对应的水平坐标R,同样令 $\alpha = 0$ 进行估算解得

$$R' = \frac{2\pi n + \arccos\left[\frac{\cos^2(b_l Z_0) + \cos^2(b_q Z_0)}{(2+\alpha)\cos(b_l Z_0)\cos(b_q Z_0)}\right]}{\xi_l - \xi_q}.$$
(11)

将估算水平坐标 R'代入公式 (5),得到第二组 估计器 ΔR :

$$\Delta R = \frac{\arccos\left[\frac{\cos^2(b_l Z_0) + \cos^2(b_q Z_0)}{(2+\alpha)\cos(b_l Z_0)\cos(b_q Z_0)}\right]}{\xi_l - \xi_q}.$$
 (12)

第二组奇异点对应坐标为 $(R' \pm \Delta R, z)$ 。

(c) 第三组奇异点

令公式(5)中 $\cos(b_q Z_0)\cos(b_l Z_0) = 0$,解得 $Z_0 = n\pi/2b_q = nH/(2q-1)$ 或 $Z_0 = n\pi/2b_l = nH/(2l-1)$,将 Z_0 代入公式(6)使其恒为0(不 受R的影响)。将 Z_0 代入公式(5)得到第三组奇 异点的深度坐标 $z = n\pi/2b_l = nH/(2l-1)$ 或 $z = n\pi/2b_q = nH/(2q-1)$ 。

第三组奇异点对应坐标为(R,z)。

2 奇异点位置仿真验证

本文使用的声场理论是简正波法,设 f_s 、 f_n 分 别为声源频率和波导中n第阶简正波的截止频率, 当 $f_s > f_n$,会产生n阶模态。模态数量、顺序以及 形态除受声源频率影响之外,还受到众多波导环 境因素制约,如:声速、波导深度、海底介质等^[9]。 为保证仿真的统一性,本文使用与距离无关的波 导环境,具体参数如表1所示。将频率为50 Hz的 声源放置在该波导深度100 m处,将产生7阶模态。 (1,7)-AMG(1,7代表当前AMG所选的两阶模态)在 20个场干涉结构周期内的声压和振速分布如图1所 示,图中颜色越深表示声压越接近0 Pa或振速越 接近0 m/s,可以看出声压和振速在水平方向上呈现周期性分布,根据奇异点与声场分布的关系可知 AMG 奇异点同样存在水平周期性 (其它 AMG 也 经过了验证)。

表1 仿真浅海环境参数

Table 1	Simulation	of shallow	ocean	envi-
ronment	t parameter	s		

海洋参数	参数值
介质分层数	1
上边界条件	顶端以上为真空
海洋深度	150 m
下边界条件	声学弹性半空间
相速度下限	0 m/s
相速度上限	2000 m/s
接收器深度	$0{\sim}150$ m
波导介质声速	1500 m/s
海底介质声速	2000 m/s
波导介质密度	1 g/cm^3
海底介质密度	$2 \mathrm{~g/cm^3}$



图 1 $sd = 100 m \forall (1,7)$ -AMG 的声压场、振速场分布 Fig. 1 Acoustic pressure, particle velocity of (1,7)-AMG when sd = 100 m

奇异点位置计算的真实性可以通过AMG 声场 仿真图和AMG 奇异点分布图来验证,(6,7)-AMG 和(1,7)-AMG 的声场和奇异点分布如图2所示,图 中AMG 的声压近零点、振速近零点和前两组奇 异点分布在位置上有对应关系。对于第三组奇异 点,当声源深度满足 $Z_0 = n\pi/2b_q$ 或 $Z_0 = n\pi/2b_l$ 时,理论上会在 $z_t = H - nH/(2l - 1)$ 或 $z_t = H - nH/(2q - 1)$ 存在第三组奇异点。对于(6,7)-AMG,当声源深度满足 $Z_t = 150 - 11.5385n$ (0 < $Z_t < 150$)时,会在波导深度 $z_t = 150 - 13.6364n$ (0 < z_t < 150)产生第三组奇异点。以n = 1和 n = 2为例的结果如图3所示,图中横线为第三组奇 异点所在深度,通过对比并未发现第三组奇异点存 在的迹象,并且通过验证发现如果第三组奇异点存 在,其深度并不受声源深度的影响,所以其对于获取 声源深度没有利用价值。



图2 前两组奇异点位置验证

Fig. 2 The first two groups of singular points location verification

3 奇异点分析

3.1 阶数与奇异点关系分析

将频率为50 Hz的声源放至波导底部,产生的7阶模态可组成6个1-AMG(1是当前AMG的阶差),图4分别对(1,2)、(2,3)、(3,4)、(4,5)、(5,6)、(6,7)AMGs的奇异点分布进行图示(两个场干涉结构周期范围内)。

为了便于观察场干涉结构周期大小,图4 中将水平坐标中心设置为0,实际对应R满足 $\cos[(\xi_l - \xi_q)R] = 1$ 。由图4可以看出: (1) 一个 场干涉结构周期内,第一组奇异点组数(未加估计 器之前的奇异点数量)为num_x = 2 × (x - 1), x 对 应 AMG 的阶数,阶数加1,对应的组数加2。通过大 量实验发现该规律在波导表面、中央以及底部最为 明显。(2) 随着阶数升高,场干涉结构周期逐渐减 小。(3) 第二组奇异点主要分布在波导底部和表面 附近,由于波导表面声场消失,随着阶数升高,靠近 波导表面的第二组奇异点逐渐消失。





Fig. 3 The third group of singular points location verification





3.2 阶差与奇异点关系分析

为了更好地分析阶差与奇异点分布关系,本 文选取不同阶差的最高阶AMG进行奇异点图示, 包括(6,7)、(5,7)、(4,7)、(3,7)、(2,7)、(1,7) AMGs。 由图5可以看出,阶差的升高会导致菱形状四点 奇异点排列的产生,该奇异点排列在阶差为2时 出现,阶差加1,一个场结构干涉结构周期内菱形 状四点奇异点排列就增加一组,并且是在R满足 $\cos[(\xi_l - \xi_q)R] = 1 \arccos[(\xi_l - \xi_q)R] = -1$ 的水平 位置上交替增加。在最大阶差时,上下两点奇异点 排列和菱形状四点奇异点排列呈上下分布。





3.3 声源深度与奇异点关系分析

为更好地观察声源深度变化对奇异点分布的 影响,本文对奇异点分布较复杂的(1,7)-AMG进行 分析。对将声源放置25 m、50 m、75 m、100 m、 125 m和150 m时(1,7)-AMG的奇异点分布进行图 示。从图6可以看出:第一组奇异点深度在声源为 25 m、75 m以及125 m时相近似,在50 m、100 m 以 及150 m时同样近似。通过对(1,7)-AMG海底第一 组奇异点的深度随声源深度由浅到深的变化进行 图示发现,第一组奇异点深度和声源深度之间存在 类周期性关系,如图7所示。

4 奇异点与声源深度关系研究

4.1 AMG 声压场

声场是众多AMG声场的组合,整个波导中奇 异点分布是复杂的。本文主要是对AMG的声场以 及奇异点进行分析,不同的AMG和声源深度会导 致奇异点的位置以及形态发生变化。由于奇异点 的分布和声压场有密切关系,可以通过奇异点将 AMG声压场和声源深度进行联系,而AMG声压场 可以根据模态提取^[10]和简正波理论的声压分解来 获得。简正波理论中声压可以分解为水平和垂直方 向的向量乘积形式:

$$P(r, z) = Z(z) R(r), \qquad (13)$$

若已知声压场 P,模态提取已获得准确的模态分 布 Z,通过公式(13)可以获得水平向量 R 用于计算 AMG的声压场。仿真声压为^[11]

$$P(r,z) = 2\pi\omega\rho \sum_{n=l,q} \sin(\xi_l z) F(z_0, b_n) \mathcal{H}_0^{(1)}(b_n r), \quad (14)$$



图 6 不同声源深度下 (1,7)-AMG 的奇异点分布

Fig. 6 Distribution of singular points of (1,7)-AMG under different depth of source

$$F(z_0, b_n) = \xi_n \sin(\xi_n z_0) [\xi_n H - \sin(\xi_n H) \cos(\xi_n H) - (\rho_1 / \rho_2)^2 \tan(\xi_n H) \sin^2(\xi_n H)]^{-1}.$$
 (15)

H₀⁽¹⁾(x) 是第一类零阶 Hankel 函数。通过将式(14)中的 sin(ξ_lz) 替换成模态提取获得的模态分布 Z 即可得到通过模态提取获得声压结果。图8为(6,7)-AMG 获得的仿真声压场分布图和计算声压场分布图。图8(a)和图8(b)的欧氏距离仅为0.0072,可以验证通过模态提取的方式获得 AMG 的声压场分布 图是可行的,可以作为奇异点深度判定的一个参考。



图 7 海底第一组奇异点深度随声源深度变化规律 Fig. 7 Variation of the depth of the first group of singular points on the bottom of waveguide with the depth of source



图 8 仿真声压场分布图与计算得到的声压场分布图 Fig. 8 Distribution of simulated acoustic pressure field and calculated acoustic pressure field

4.2 求逆运算获取声源深度

如果将浅海仿真参数按表1来设定,奇异点 的分布仅与AMG的阶数、阶差以及声源深度有 关。由公式(8)、公式(9)以及图7可知,第一组奇 异点深度(AMG声压场近零点深度)和声源深度有 关。将50 Hz 声源放置在波导100 m 深度处,得到 (6,7)-AMG水平距离满足 $\cos[(\xi_l - \xi_a)R] = -1$ 的第 一组奇异点深度分别约为: 22.8 m、46.6 m、71.5 m、 96.2 m、121.1 m、146 m, 这组奇异点深度对应公 式(9),将z代入公式(9)得到的结果如图9所示,图 中横坐标为不同声源深度Z0代入公式(9)的值。由 图看出通过一个AMG求解的声源深度不唯一,为 了找到准确的声源深度,需要引入辅助AMG,通过 结合两个AMG的结果得到对应的声源深度。图10 为(5,7)-AMG和(6,7)-AMG的结果,由图可知,如 果已知某两个AMG的第一组奇异点深度(某两个 AMG 声场分布的近零点深度),理论上可以获得声 源的深度,前提是必须获得准确的模态提取结果。





4.3 反演获取声源深度

本节将AMG水平位置满足 cos[$(\xi_l - \xi_q)R$] = -1的第一组最靠近波导表面的奇异点深度作为反 演参数来获得声源深度。在表1的仿真环境下,同样 设置声源深度为100 m,表2统计出个别1,2-AMG 对应奇异点的深度值(声源深度为100 m时,低阶 1-AMG奇异点分布不明显,所以用2-AMG作为参 数补充)。



图 10 (5,7)-AMG、(6,7)-AMG 的第一组奇异点获 取声源深度

Fig. 10 Obtain the depth of source through the first group of singular points of (5,7)-AMG and (6,7)-AMG

表 2 反演参数 Table 2 Inversion parameter

1,2-AMG(1-7 阶)	$z/{ m m}$
(2,3)-AMG	58.80
(3,4)-AMG	23.50
(4,5)-AMG	41.35
(5,6)-AMG	14.48
(6,7)-AMG	0.94
(1,3)-AMG	47.29
(2,4)-AMG	41.35
(3,5)-AMG	58.50
(4,6)-AMG	13.82
(5,7)-AMG	12.40

根据反演参数定义代价函数:

$$\operatorname{Cost}\left(\Omega\right) = \frac{Z\left(\Omega\right)}{2\sigma_{z}},\tag{16}$$

$$Z\left(\Omega\right) = \frac{1}{N} \operatorname{sqrt}\left(\sum_{i=1}^{N} \left(z_{i}^{e} - z_{i}^{c}\right)^{2}\right), \quad (17)$$

其中, Ω 为待反演参数-声源深度, N 是表 2中1,2-AMG 的数量, 公式 (17) 采用最小均方差原则来建立 AMG 奇异点深度的代价函数, 公式 (16) 中的 σ_z 表示公式 (17) 的均方差, z_i^c 代表拷贝场奇异点深度 值。对代价函数使用模拟退火算法实现快速寻找 Ω_0

使得 Cost 最小,反演得到声源深度为 $\Omega_0 = 100$ m, 由于反演数据是理想环境下得到的,所以反演结果 与真实值吻合。

进一步,将声源深度分别放置在不同的深度进行反演,15个声源深度分别设置是10m、20m、···、150m,通过以下误差公式获取实验误差:

$$\Delta = \frac{1}{N} \sum_{i=10,s=10,i=i+s}^{N \times s} \frac{|Z_i^e - Z_i^t|}{Z_i^t}, \quad (18)$$

公式(18)中,N是测试的声源深度数量,s是测试声 源深度的间隔深度大小(此处为10 m), Z_i^e 是反演 获得的声源深度, Z_i^t 是参考声源深度。

当模拟退火算法的降温速度小于等于1 m时 (模拟退火算法中的温度为声源深度,本文降温速度 默认使用1 m),测试结果 Δ 为0,误差为0说明该反 演方法在不考虑模型误差和噪声干扰影响时适用。 当模拟退火算法的降温速度大于1 m时,会导致拷 贝场温度不包含最优温度,使最优解偏差较大,以降 温速度为3 m为例得到测试结果 Δ 为3.7%。

5 结论

本文仿真分析了理想浅海波导远场 AMG 的奇 异点分布规律,发现奇异点分布和 AMG 的阶数、阶 差以及声源深度之间都存在联系。第一组奇异点的 深度和声源深度之间存在着对应的函数关系,又由 于奇异点的分布和波导 AMG 选取有关,所以通过 模态提取获得模态分布顺序,理论计算得到声压场 水平分量,从而得到两个 AMG 声压场分布,进一步 通过逆运算从第一组奇异点的声压近零点深度获 取了声源深度信息,该过程的难点是如何准确获得 模态顺序和分布;另外还以第一组奇异点深度作为 代价函数参数,通过反演的方式获得了声源深度。

本文所述方法是在数值模拟的基础上进行的 理论分析,进一步的研究需要在本文的基础上进行 试验数据处理,确认方法的实际可用性和准确性,最 终将基于声场奇异点的声源深度获取方法在现实 中应用。



- Waterhouse R V. Energy streamlines for sound sources[J]. The Journal of the Acoustical Society of America, 1985, 78(S1): S25.
- [2] Skelton E A. Energy streamlines for a spherical shell scattering plane waves[J]. The Journal of the Acoustical Society of America, 1986, 80(5): 1473–1478.
- [3] Mann A J. Instantaneous and time-averaged energy transfer in acoustic fields[J]. The Journal of the Acoustical Society of America, 1987, 82(1): 17–30.
- [4] Chien C F, Waterhouse R V. Singular points of intensity streamlines in two-dimensional sound fields[J]. The Journal of the Acoustical Society of America, 1997, 101(2): 705–712.
- [5] Eliseevnin V A, Tuzhilkin Y I. Acoustic power flux in a waveguide[J]. Acoustical Physics, 2001, 47(6): 688–694.
- [6] Shchurov V A, Lyashkov A S, Tkachenko E S. Statistical characteristics of the dynamic noise energy flux in the ocean in the 400 to 700 Hz frequency band[J]. Acoustical Physics, 2008, 54(4): 518–525.
- [7] Shchurov V A. Peculiarities of real shallow sea wave-guide vortex structure[J]. The Journal of the Acoustical Society of America, 2019, 145(1): 525–530.
- [8] Brekhovskikh L M, Lysanov Y P, Lysanov J P. Fundamentals of ocean acoustics[M]. New York: AIP Press, 2003: 35–37.
- [9] 布列霍夫斯基赫. 分层介质中的波 [M]. 杨训仁, 译. 第二版. 北京: 科学出版社, 1985: 229-230.
- [10] Neilsen T B, Westwood E K. Extraction of acoustic normal mode depth functions using vertical line array data[J]. The Journal of the Acoustical Society of America, 2002, 111(2): 748–756.
- [11] 惠俊英. 矢量声信号处理基础 [M]. 北京: 国防工业出版社,
 2009: 83-84.