

◇ 研究报告 ◇

# 多项式结构恒定束宽波束形成器的高效 稀疏化设计\*

王晓楠 陈华伟<sup>†</sup>

(南京航空航天大学电子信息工程学院 南京 211106)

**摘要:** 针对传声器阵列多项式结构波束形成器实现复杂度偏大的问题, 提出了一种基于交替方向乘子法的多项式结构波束形成器稀疏化设计方法。该方法利用主瓣空间响应变化的优化准则以实现恒定束宽波束形成器设计, 并通过将原始的高维非凸问题转化为并行求解的低维凸优化子问题, 有效提高了多项式结构波束形成器的稀疏化效率。实验结果表明, 与现有多项式结构波束形成器的稀疏化设计方法相比, 所提方法在保持良好的设计鲁棒性的同时具备了更优的恒定束宽性能。在优化效率方面, 所提方法耗时仅为现有方法的 0.69%~1.09%, 并且获得了更高的抽头稀疏度。

**关键词:** 传声器阵列; 多项式结构波束形成器; 恒定束宽; 稀疏化设计; 交替方向乘子法

中图分类号: TN912.3

文献标识码: A

文章编号: 1000-310X(2024)06-1203-16

DOI: 10.11684/j.issn.1000-310X.2024.06.003

## Efficient sparse design of polynomial beamformers with constant-beamwidth

WANG Xiaonan CHEN Huawei

(College of Electronic and information Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics,  
Nanjing 211106, China)

**Abstract:** To address the issue of high computational complexity in implementing polynomial structure beamformers for microphone arrays, a sparse design method based on the alternating direction method of multipliers is proposed. This method utilizes an optimization criterion that considers the mainlobe spatial response variation to achieve constant-beamwidth beamformer design, and by transforming the original high-dimensional non-convex problem into parallel solvable low-dimensional convex subproblems, the efficiency of sparse design for polynomial structure beamformers is significantly improved. Experimental results demonstrate that, compared to existing sparse design methods for polynomial structure beamformers, the proposed method exhibits better constant-beamwidth performance while maintaining good design robustness. In terms of optimization efficiency, the proposed method only takes 0.69% to 1.09% of the time required by the existing methods, and it achieves higher tap sparsity.

**Keywords:** Microphone arrays; Polynomial beamformers; Constant-beamwidth; Sparse design; Alternating direction method of multipliers

2023-07-11 收稿; 2023-09-13 定稿

\*国家自然科学基金项目 (61971219)

作者简介: 王晓楠 (1999-), 女, 山东临沂人, 硕士研究生, 研究方向: 传感器阵列信号处理和声学信号处理。

<sup>†</sup>通信作者 E-mail: hwchen@nuaa.edu.cn

## 0 引言

波束形成亦称空域滤波,是传声器阵列的一项关键技术,在声频信号处理领域具有广泛应用<sup>[1-3]</sup>。传统的传声器阵列波束形成器,如滤波求和结构波束形成器<sup>[4-5]</sup>,往往考虑的是静态目标声源。当目标声源位置发生改变时,需要重新优化波束形成器的权系数,因此不便应用于目标声源位置动态变化的场景。为克服传统波束形成器存在的不足,人们提出了基于多项式结构的传声器阵列波束形成器设计方法<sup>[6-7]</sup>。多项式结构波束形成器在声源位置发生改变时,不需要调节波束形成器的滤波系数,而仅需改变调向参数便可实现波束调向功能,且适用于任意的阵列几何形状。

与传统的滤波求和结构波束形成器不同,多项式结构波束形成器的每个传声器通道后面连接的是由一组并行的有限冲激响应(Finite impulse response, FIR)滤波器所构成的Farrow结构,而不再是单个FIR滤波器。因此,多项式结构波束形成器的权系数维数更高,实现结构也更为复杂。为了降低多项式结构波束形成器的实现复杂度,文献[8]利用最差平均性能优化(Worst-case mean performance, WCMP)准则实现了多项式结构波束形成器的稀疏化设计。研究表明,多达超过一半的多项式结构波束形成器权系数存在冗余,因此,稀疏化设计对于降低多项式结构波束形成器的实现复杂度具有重要研究意义。需要注意的是,现有的多项式结构波束形成器稀疏化设计采用CVX凸优化工具箱求解优化问题。但是,正如上文所述,多项式结构波束形成器的权系数维数高,使得相应的稀疏化设计问题维数偏高,因此采用CVX求解高维稀疏化设计方法存在效率低的突出问题。另一方面,现有的多项式结构波束形成器稀疏化设计没有考虑恒定束宽约束<sup>[9]</sup>,可能导致设计的波束形成器的主瓣频率不变特性不够理想,进而造成较大的目标声信号失真。

针对多项式结构波束形成器稀疏化设计存在的以上问题,本文提出了一种基于交替方向乘法子法(Alternating direction method of multipliers, ADMM)<sup>[10-11]</sup>的多项式结构波束形成器抽头稀疏方法。该方法利用主瓣空间响应变化(Mainlobe spatial response variation, MSRVS)<sup>[12]</sup>优化以实现

多项式结构波束形成器的恒定束宽设计,并通过将原始的高维非凸问题转化为并行求解的低维凸优化子问题,有效提高了多项式结构波束形成器的稀疏化效率。由于将MSRV引入到稀疏化设计的代价函数中,因此相比现有的稀疏化设计,所提设计方法的自由度增大。得益于此,所提稀疏化设计方法在提高多项式结构波束形成器恒定束宽特性的同时,也能够进一步增大设计结果的稀疏度。

## 1 传声器阵列模型

考虑远场条件下由 $K$ 个传声器构成的均匀线阵。多项式结构波束形成器由滤波模块与调向模块构成,其结构如图1所示。滤波模块决定了波束形成器的阵列响应特性,而调向模块则用于调整阵列响应的主瓣指向方向。在滤波模块中,每个传声器连接一个由 $N$ 个FIR滤波器并行构成的滤波器组,每个FIR滤波器有 $J$ 个抽头系数,相应的多项式结构波束形成器权值矢量可表示为 $\mathbf{w} = [w_{0,0,0}, \dots, w_{0,N-1,0}, w_{0,0,1}, \dots, w_{0,N-1,1}, \dots, w_{K-1,0,J-1}, \dots, w_{K-1,N-1,J-1}]^T \in \mathbf{R}^{KNJ}$ , $[\cdot]^T$ 表示转置运算;在调向模块中,当改变目标声源的入射角度 $\theta_d$ 时,无需重新计算权值 $\mathbf{w}$ ,只需令参数 $\phi_d = \theta_d$ 即可获得期望方向的波束响应。

存在传声器失配误差条件下,对于频率为 $f$ 、入射角度为 $\theta$ 的声信号,多项式结构波束形成器的波束图可以表示为<sup>[7]</sup>

$$\hat{P}(f, \theta, \phi_d) = \mathbf{w}^T \hat{\mathbf{g}}(f, \theta, \phi_d), \quad (1)$$

式(1)中, $\phi_d$ 为波束的主瓣调向角度,

$$\hat{\mathbf{g}}(f, \theta, \phi_d) = [\mathbf{A}(f, \theta) \odot \mathbf{h}(f, \theta)] \otimes \mathbf{e}(f) \otimes \mathbf{s}(\phi_d), \quad (2)$$

其中, $\odot$ 为Hadamard积, $\otimes$ 为Kronecker积,

$$\mathbf{A}(f, \theta) = [A_0(f, \theta), A_1(f, \theta), \dots, A_{K-1}(f, \theta)]^T, \quad (3)$$

$$\mathbf{h}(f, \theta) = [e^{-j2\pi f d_0 \cos \theta/c}, e^{-j2\pi f d_1 \cos \theta/c}, \dots, e^{-j2\pi f d_{K-1} \cos \theta/c}]^T, \quad (4)$$

$$\mathbf{e}(f) = [1, e^{-j2\pi f/f_s}, \dots, e^{-j2\pi f(J-1)/f_s}]^T, \quad (5)$$

$$\mathbf{s}(\phi_d) = [(\bar{\phi}_d)^{N-1}, \dots, \bar{\phi}_d, 1]^T, \quad (6)$$

其中,

$$A_k(f, \theta) = [1 + \Delta a_k(f, \theta)] e^{-j[\Delta \varphi_k(f, \theta) + 2\pi f \Delta d_k \cos \theta/c]},$$

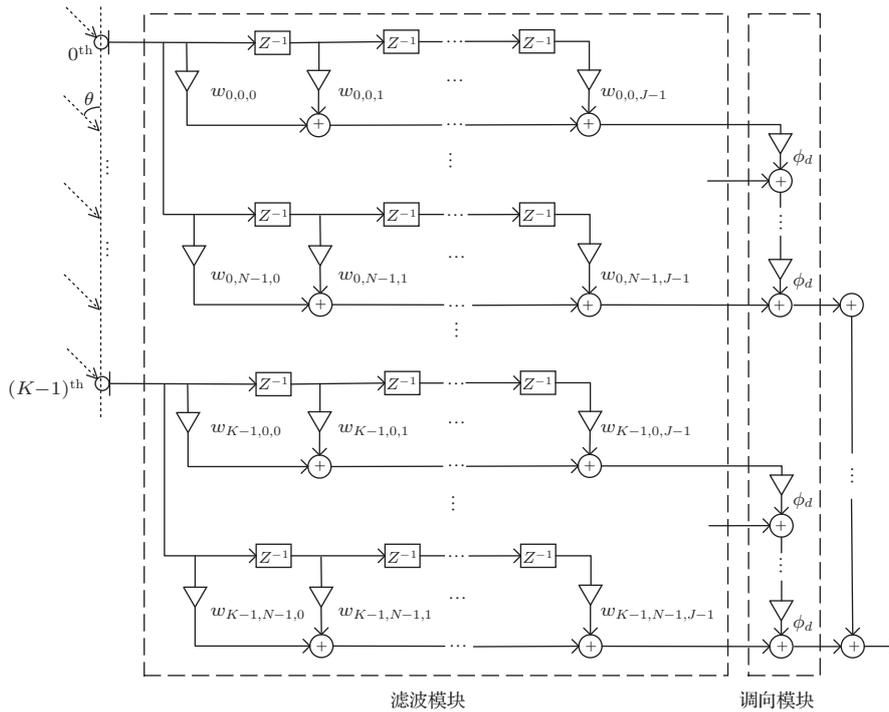


图 1 多项式结构波束形成器的结构图

Fig. 1 Structure of polynomial beamformers

$k = 0, 1, \dots, K - 1$ ;  $\Delta a_k(f, \theta)$ 、 $\Delta \varphi_k(f, \theta)$  及  $\Delta d_k$  分别表示第  $k$  个阵元的增益、相位及位置误差;  $d_k$  为第  $k$  个阵元与参考点的距离,  $c$  为空气声速,  $f_s$  为采样频率,  $\bar{\phi}_d = (\phi_d - 90^\circ)/90^\circ$  为归一化的期望调向角度,  $j = \sqrt{-1}$ 。

为了便于分析,式 (2) 可进一步改写为

$$\hat{g}(f, \theta, \phi_d) = g(f, \theta, \phi_d) + \Delta g(f, \theta, \phi_d), \quad (7)$$

其中,  $g(f, \theta, \phi_d) = h(f, \theta) \otimes e(f) \otimes s(\phi_d)$  为理想导向矢量,  $\Delta g(f, \theta, \phi_d)$  为失配误差所引起的误差项。

## 2 多项式结构波束形成器稀疏优化问题的构建

### 2.1 设计准则

在实际应用中传声器通常存在增益、相位和位置等误差,因此在多项式结构波束形成器的稀疏化设计中需要采用鲁棒设计方法。现有多项式结构波束形成器的稀疏化设计采用 WCMP 准则较好地解决了设计的鲁棒性问题<sup>[8]</sup>,基于 WCMP 准则的鲁棒优化问题表述如下:

$$\min_{\mathbf{w}} \max_{f, \theta, \phi_d} |\mathbf{E}\{\hat{P}(f, \theta, \phi_d) - P_d(f, \theta, \phi_d)\}|, \quad (8)$$

式 (8) 中,  $f \in \Omega$ ,  $\theta \in \Theta$ ,  $\phi_d \in \Phi$  ( $\Omega$ 、 $\Theta$ 、 $\Phi$  分别表示频率、角度、主瓣指向的调节范围);  $P_d(f, \theta, \phi_d)$  为理想波束响应;  $\mathbf{E}\{\cdot\}$  表示均值运算。但式 (8) 要求实际波束响应尽可能接近理想响应,未考虑恒定束宽约束,可能导致所得波束图的主瓣频率不变性较差,进而造成目标声信号存在较大的失真。

为避免这一问题,提出使用 MSRv 设计,即令式 (8) 中的理想响应  $P_d(f, \theta_{ML}, \phi_d)$  为参考频率点的波束响应  $\hat{P}(f_0, \theta_{ML}, \phi_d)$  ( $\theta_{ML}$  为主瓣角度,  $f_0$  为参考频率),并考虑对旁瓣波束响应的约束条件,则恒定束宽多项式结构波束形成器的鲁棒优化设计问题可以表述为

$$\min_{\mathbf{w}} \max_{f, \theta_{ML}, \phi_d} |\mathbf{E}\{\mathbf{w}^T [\hat{g}(f, \theta_{ML}, \phi_d) - \hat{g}(f_0, \theta_{ML}, \phi_d)]\}|, \quad (9a)$$

$$\text{s.t. } |\mathbf{E}\{\mathbf{w}^T \hat{g}(f_0, \theta_{ML}, \phi_d)\}| \geq 1, \quad (9b)$$

$$\max_{f, \theta_{SL}, \phi_d} |\mathbf{E}\{\mathbf{w}^T \hat{g}(f, \theta_{SL}, \phi_d)\}| \leq \eta, \quad (9c)$$

其中,  $\theta_{ML} \in \Theta_{ML}$ ,  $\theta_{SL} \in \Theta_{SL}$  ( $\Theta_{ML}$ 、 $\Theta_{SL}$  分别表示主瓣、旁瓣的调节范围);  $\eta$  为旁瓣响应约束值。为避免计算式 (9a) 时产生平凡解,式 (9b) 施加了期望指向角度,即  $\theta_{ML} = \phi_d$  时的波束响应约束,当不考虑传声器失配误差时,式 (9b) 取等号。式 (9c) 则约束了旁瓣区域内波束响应的上限。

## 2.2 问题构建

通过对代价函数(9a)增加波束形成器权向量的 $\ell_0$ 范数惩罚项,可以实现多项式结构波束形成器的稀疏化设计。但相应的优化问题是一种NP-hard问题,优化求解较为困难。一种可行的解决方案是采用迭代加权 $\ell_1$ 范数<sup>[13]</sup>进行稀疏优化处理,从而获得较好的逼近 $\ell_0$ 范数的凸近似结果。

对于第 $l$ 次迭代( $0 \leq l \leq L$ ,  $L$ 为最大迭代次数),采用迭代加权 $\ell_1$ 范数的多项式结构波束形成器稀疏化设计问题可表示如下:

$$\min_{\mathbf{w}} \max_{f, \theta_{ML}, \phi_d} |\mathbf{E}\{\mathbf{w}^T [\hat{\mathbf{g}}(f, \theta_{ML}, \phi_d) - \hat{\mathbf{g}}(f_0, \theta_{ML}, \phi_d)]\}| + \delta \sum_{i=1}^{KNJ} b_i^{(l)} |w_i|, \quad (10a)$$

$$\text{s.t. } w_i = 0, \forall i \in \mathbf{D}^{(l)}, \quad (10b)$$

$$|\mathbf{E}\{\mathbf{w}^T \hat{\mathbf{g}}(f_0, \theta_{ML} = \phi_d, \phi_d)\}| \geq 1, \quad (10c)$$

$$\max_{f, \theta_{SL}, \phi_d} |\mathbf{E}\{\mathbf{w}^T \hat{\mathbf{g}}(f, \theta_{SL}, \phi_d)\}| \leq \eta, \quad (10d)$$

其中, $\delta$ 为稀疏度控制参数; $b_i^{(l)} = 1/(|w_i^{(l-1)}| + \varepsilon_0)$ ,  $i = 1, 2, \dots, KNJ$ ,为第 $l$ 次迭代的加权系数; $\varepsilon_0$ 为一小的正实数,以确保算法的稳定; $\mathbf{D}^{(l)} = \{i | |w_i^{(l-1)}| \leq \varepsilon_D\}$ 为权值零位置索引,则式(10b)表示当权值低于门限值 $\varepsilon_D$ 时则视为是可稀疏的并置为零值。令 $\mathbf{b}^{(l)} = (b_i^{(l)})_{KNJ \times 1}$ ,则当 $l = 0$ 时,有 $\mathbf{b}^{(0)} = \mathbf{1}_{KNJ}$ 且 $\mathbf{D}^{(0)} = \emptyset$ ,  $\mathbf{1}_{KNJ} \in \mathbf{R}^{KNJ}$ 为全1列向量。

当迭代次数达到预设的最大值 $L$ 时,求解如下含约束的优化问题可得到最优权值 $\mathbf{w}^*$ :

$$\min_{\mathbf{w}} \max_{f, \theta_{ML}, \phi_d} |\mathbf{E}\{\mathbf{w}^T [\hat{\mathbf{g}}(f, \theta_{ML}, \phi_d) - \hat{\mathbf{g}}(f_0, \theta_{ML}, \phi_d)]\}|, \quad (11a)$$

$$\text{s.t. } w_i = 0, \forall i \in \mathbf{D}^{(L)}, \quad (11b)$$

$$|\mathbf{E}\{\mathbf{w}^T \hat{\mathbf{g}}(f_0, \theta_{ML} = \phi_d, \phi_d)\}| \geq 1, \quad (11c)$$

$$\max_{f, \theta_{SL}, \phi_d} |\mathbf{E}\{\mathbf{w}^T \hat{\mathbf{g}}(f, \theta_{SL}, \phi_d)\}| \leq \eta. \quad (11d)$$

以上稀疏化设计问题的整体流程图如图2所示。

根据图2所示步骤,在对原始非凸问题式(10)与式(11)进行凸近似处理后,类似文献[8],可采用CVX凸优化工具箱进行求解。但考虑到多项式结构波束形成器权系数维数高,且迭代加权 $\ell_1$ 范数稀疏涉及多次迭代过程,使用CVX存在优化效率低的突出问题。鉴于此,下文将提出基于ADMM的

稀疏优化方法。ADMM具备收敛速度快、计算效率高等优点<sup>[14]</sup>,通过将高维问题转化为多个可并行求解的低维优化子问题,能够在保证波束形成器性能的同时实现高效求解。

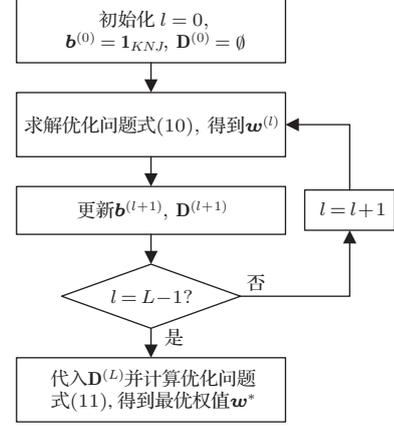


图2 稀疏优化问题的流程图

Fig. 2 Flowchart of sparse optimization problems

## 3 稀疏化问题的ADMM求解算法

### 3.1 优化问题的转化

由于式(9a)~(9c)为非凸问题,不便于求解。为此,首先将其近似转化成相应的凸问题。根据式(7)可以得到平均波束响应的表达式为

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}\{\hat{P}(f, \theta, \phi_d)\} \\ &= \mathbf{w}^T \mathbf{g}(f, \theta, \phi_d) + \mathbf{E}\{\mathbf{w}^T \Delta \mathbf{g}(f, \theta, \phi_d)\}. \end{aligned} \quad (12)$$

因此,根据式(12),可以寻找式(9a)中代价函数的上界:

$$\begin{aligned} & |\mathbf{E}\{\mathbf{w}^T [\hat{\mathbf{g}}(f, \theta_{ML}, \phi_d) - \hat{\mathbf{g}}(f_0, \theta_{ML}, \phi_d)]\}| \\ &= |\mathbf{w}^T [\mathbf{g}(f, \theta_{ML}, \phi_d) - \mathbf{g}(f_0, \theta_{ML}, \phi_d)] \\ & \quad + \mathbf{w}^T \mathbf{E}\{\Delta \mathbf{g}(f, \theta_{ML}, \phi_d)\} \\ & \quad - \mathbf{w}^T \mathbf{E}\{\Delta \mathbf{g}(f_0, \theta_{ML}, \phi_d)\}| \\ &\leq |\mathbf{w}^T [\mathbf{g}(f, \theta_{ML}, \phi_d) - \mathbf{g}(f_0, \theta_{ML}, \phi_d)]| \\ & \quad + |\mathbf{w}^T \mathbf{E}\{\Delta \mathbf{g}(f, \theta_{ML}, \phi_d)\}| \\ & \quad + |\mathbf{w}^T \mathbf{E}\{\Delta \mathbf{g}(f_0, \theta_{ML}, \phi_d)\}|, \end{aligned} \quad (13)$$

式(13)中,当 $\mathbf{w}^T [\mathbf{g}(f, \theta_{ML}, \phi_d) - \mathbf{g}(f_0, \theta_{ML}, \phi_d)]$ 、 $\mathbf{w}^T \mathbf{E}\{\Delta \mathbf{g}(f, \theta_{ML}, \phi_d)\}$ 、 $-\mathbf{w}^T \mathbf{E}\{\Delta \mathbf{g}(f_0, \theta_{ML}, \phi_d)\}$ 三项同号或 $\mathbf{w}$ 取零解时,不等式的等号成立。

考虑到实际测量偏差,基于WCMP的设计准则,假设传声器失配误差的均值存在小的扰动:  $|\mathbf{E}\{\Delta a_k(f, \theta)\}| \leq \mu_a$ ,  $|\mathbf{E}\{\Delta \varphi_k(f, \theta)\}| \leq \mu_\varphi$ ,

$|\mathbf{E}\{\Delta d_k\}| \leq \mu_d$ ,  $k = 0, 1, \dots, K-1$ 。则根据 Cauchy-Schwarz 不等式<sup>[15]</sup>得到:

$$|\mathbf{w}^T \mathbf{E}\{\Delta \mathbf{g}(f, \theta_{\text{ML}}, \phi_d)\}| \leq \mu_g \|\mathbf{w}\|_2, \quad (14)$$

其中,

$$\mu_g = \left\{ KJ \max_{\phi_d \in \Phi} \left\{ [1 - (\bar{\phi}_d)^{2N}] / [1 - (\bar{\phi}_d)^2] \right\} [(1 + \mu_a)^2 - 2(1 + \mu_a) \cos(\mu_\varphi + 2\pi f_{\text{max}} \mu_d / c) + 1] \right\}^{1/2}$$

为失配误差均值的最大扇形边界<sup>[5]</sup>,  $f_{\text{max}}$  为频率最大值,  $\|\cdot\|_2$  为  $\ell_2$  范数。利用式(14), 式(13)可进一步转化为

$$\begin{aligned} & |\mathbf{E}\{\mathbf{w}^T [\hat{\mathbf{g}}(f, \theta_{\text{ML}}, \phi_d) - \hat{\mathbf{g}}(f_0, \theta_{\text{ML}}, \phi_d)]\}| \\ & \leq |\mathbf{w}^T [\mathbf{g}(f, \theta_{\text{ML}}, \phi_d) - \mathbf{g}(f_0, \theta_{\text{ML}}, \phi_d)]| \\ & \quad + 2\mu_g \|\mathbf{w}\|_2. \end{aligned} \quad (15)$$

根据式(12), 同样可求得式(9b)的下界:

$$\begin{aligned} & |\mathbf{E}\{\mathbf{w}^T \hat{\mathbf{g}}(f_0, \theta_{\text{ML}} = \phi_d, \phi_d)\}| \\ & \geq \|\mathbf{w}^T \mathbf{g}(f_0, \theta_{\text{ML}} = \phi_d, \phi_d)\| \\ & \quad - |\mathbf{w}^T \mathbf{E}\{\Delta \mathbf{g}(f_0, \theta_{\text{ML}} = \phi_d, \phi_d)\}|, \end{aligned} \quad (16)$$

式中, 当  $\mathbf{w}^T \mathbf{g}(f_0, \theta_{\text{ML}} = \phi_d, \phi_d)$ 、 $\mathbf{w}^T \mathbf{E}\{\Delta \mathbf{g}(f_0, \theta_{\text{ML}} = \phi_d, \phi_d)\}$  两项异号或  $\mathbf{w}$  取零解时, 等号成立。假设  $\Delta \mathbf{g}(f, \theta, \phi_d)$  为一较小的导向矢量误差项, 即  $|\mathbf{w}^T \mathbf{g}(f_0, \theta_{\text{ML}} = \phi_d, \phi_d)| > |\mathbf{w}^T \mathbf{E}\{\Delta \mathbf{g}(f_0, \theta_{\text{ML}} = \phi_d, \phi_d)\}|$ , 则将式(14)代入式(16), 原始约束问题式(9b)可以转化为

$$|\mathbf{w}^T \mathbf{g}(f_0, \theta_{\text{ML}} = \phi_d, \phi_d)| - \mu_g \|\mathbf{w}\|_2 \geq 1. \quad (17)$$

由于对权值引入相位旋转并不影响原始约束优化问题的解<sup>[14]</sup>, 因此可通过旋转相位直至满足  $\text{Re}\{\mathbf{w}^T \mathbf{g}(f_0, \theta_{\text{ML}}, \phi_d)\} \geq 0$  且  $\text{Im}\{\mathbf{w}^T \mathbf{g}(f_0, \theta_{\text{ML}}, \phi_d)\} = 0$ , 其中  $\text{Re}\{\cdot\}$  为取实运算,  $\text{Im}\{\cdot\}$  为取虚运算。相应地, 式(17)可以进一步转化为如下的凸约束的形式:

$$\mathbf{w}^T \text{Re}\{\mathbf{g}(f_0, \theta_{\text{ML}} = \phi_d, \phi_d)\} \geq 1 + \mu_g \|\mathbf{w}\|_2. \quad (18)$$

类似式(15)的推导过程, 同理可对式(9c)的旁瓣波束响应项做如下的松弛处理:

$$\begin{aligned} & |\mathbf{E}\{\mathbf{w}^T \hat{\mathbf{g}}(f, \theta_{\text{SL}}, \phi_d)\}| \\ & \leq |\mathbf{w}^T \mathbf{g}(f, \theta_{\text{SL}}, \phi_d)| + \mu_g \|\mathbf{w}\|_2. \end{aligned} \quad (19)$$

则式(9c)可以转化为

$$\max_{f, \theta_{\text{SL}}, \phi_d} |\mathbf{w}^T \mathbf{g}(f, \theta_{\text{SL}}, \phi_d)| + \mu_g \|\mathbf{w}\|_2 \leq \eta. \quad (20)$$

根据上述推导结果, 式(10)能够近似转化为如下的凸优化问题:

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{w}} \max_{f, \theta_{\text{ML}}, \phi_d} |\mathbf{w}^T [\mathbf{g}(f, \theta_{\text{ML}}, \phi_d) - \mathbf{g}(f_0, \theta_{\text{ML}}, \phi_d)]| \\ & \quad + 2\mu_g \|\mathbf{w}\|_2 + \delta \sum_{i=1}^{KNJ} b_i^{(l)} |w_i|, \end{aligned} \quad (21a)$$

$$\text{s.t. } w_i = 0, \quad \forall i \in \mathbf{D}^{(l)}, \quad (21b)$$

$$\mathbf{w}^T \text{Re}\{\mathbf{g}(f_0, \theta_{\text{ML}} = \phi_d, \phi_d)\} \geq 1 + \mu_g \|\mathbf{w}\|_2, \quad (21c)$$

$$\max_{f, \theta_{\text{SL}}, \phi_d} |\mathbf{w}^T \mathbf{g}(f, \theta_{\text{SL}}, \phi_d)| + \mu_g \|\mathbf{w}\|_2 \leq \eta. \quad (21d)$$

同理, 将式(15)、式(18)和式(20)代入式(11)能够得到对应的凸近似表示。

### 3.2 ADMM 求解算法的推导

由于式(10)与式(11)的问题构造相似, 因此本节仅讨论如何求解式(10), 即相应的凸优化问题式(21)。

为了便于分析, 分别对变量  $f$ 、 $\theta_{\text{ML}}$ 、 $\theta_{\text{SL}}$ 、 $\phi_d$  的取值范围做离散化处理, 即:  $f_h \in \Omega$ ,  $h = 1, 2, \dots, H$ ;  $\theta_{\text{ML}, \hat{q}} \in \Theta_{\text{ML}}$ ,  $\hat{q} = 1, 2, \dots, \hat{Q}$ ;  $\theta_{\text{SL}, \bar{q}} \in \Theta_{\text{SL}}$ ,  $\bar{q} = 1, 2, \dots, \bar{Q}$ ;  $\phi_{d,r} \in \Phi$ ,  $r = 1, 2, \dots, R$ 。定义导向矢量  $\mathbf{g}_{f,m} = \mathbf{g}(f_h, \theta_{\text{ML}, \hat{q}}, \phi_{d,r}) - \mathbf{g}(f_0, \theta_{\text{ML}, \hat{q}}, \phi_{d,r})$ ,  $m = 1, 2, \dots, M$ ,  $M = H \times \hat{Q} \times R$ ;  $\mathbf{g}_{\text{SL},s} = \mathbf{g}(f_h, \theta_{\text{SL}, \bar{q}}, \phi_{d,r})$ ,  $s = 1, 2, \dots, S$ ,  $S = H \times \bar{Q} \times R$ ;  $\mathbf{g}_{0,r} = \mathbf{g}(f_0, \theta_{\text{ML}} = \phi_{d,r}, \phi_{d,r})$ ,  $r = 1, 2, \dots, R$ 。

注意到, 第  $l$  次迭代过程中, 根据第  $l-1$  次稀疏化结果, 已得到  $\mathbf{w}$  的零抽头索引  $\mathbf{D}^{(l)}$  及加权矢量  $\mathbf{b}^{(l)}$ , 因此根据式(21b)约束条件能够确定零抽头的位置, 只需更新剩余位置的非零抽头即可。记  $\mathbf{X}$  为  $\mathbf{w}$  的全部位置集合, 则第  $l$  次迭代的非零抽头位置集合可表示为  $\bar{\mathbf{D}}^{(l)} = \mathbf{X} - \mathbf{D}^{(l)}$ 。记  $U$  为集合  $\bar{\mathbf{D}}^{(l)}$  中的元素个数,  $U \leq KNJ$ , 则需要更新的抽头矢量表示如下:

$$\tilde{\mathbf{w}} = \{w_i | \forall i \in \bar{\mathbf{D}}^{(l)}\} \in \mathbf{R}^U. \quad (22)$$

相应地,  $\tilde{\mathbf{w}}$  的加权系数需重新表示为

$$\tilde{b}_i^{(l)} = b_i^{(l)}, \quad \forall i \in \bar{\mathbf{D}}^{(l)}, \quad (23)$$

式(23)中,  $\tilde{b}_i^{(l)}$  表示每次迭代时各非零抽头被赋予的权重, 通过迭代过程中保留权重较大的抽头, 从而提高加权系数优化的稀疏度。同理, 更新  $\tilde{\mathbf{w}}$  所需要的各导向矢量分别表示为

$$\tilde{\mathbf{g}}_{f,m} = \{g_i(f_h, \theta_{\text{ML},\hat{q}}, \phi_{d,r}) - g_i(f_0, \theta_{\text{ML},\hat{q}}, \phi_{d,r}) | \forall i \in \bar{\mathbf{D}}^{(l)}\}, \quad m = 1, 2, \dots, M. \quad (24)$$

$$\tilde{\mathbf{g}}_{\text{SL},s} = \{g_i(f_h, \theta_{\text{SL},\hat{q}}, \phi_{d,r}) | \forall i \in \bar{\mathbf{D}}^{(l)}\}, \quad s = 1, 2, \dots, S. \quad (25)$$

$$\tilde{\mathbf{g}}_{0,r} = \{g_i(f_0, \theta_{\text{ML}} = \phi_{d,r}, \phi_{d,r}) | \forall i \in \bar{\mathbf{D}}^{(l)}\}, \quad r = 1, 2, \dots, R. \quad (26)$$

进一步定义如下实矩阵:

$$\mathbf{G}_{f,m} = [\text{Re}\{\tilde{\mathbf{g}}_{f,m}\}, \text{Im}\{\tilde{\mathbf{g}}_{f,m}\}] \in \mathbf{R}^{U \times 2}, \quad m = 1, 2, \dots, M. \quad (27)$$

$$\mathbf{G}_{\text{SL},s} = [\text{Re}\{\tilde{\mathbf{g}}_{\text{SL},s}\}, \text{Im}\{\tilde{\mathbf{g}}_{\text{SL},s}\}] \in \mathbf{R}^{U \times 2}, \quad s = 1, 2, \dots, S. \quad (28)$$

$$\mathbf{G}_{0,r} = \text{Re}\{\tilde{\mathbf{g}}_{0,r}\} \in \mathbf{R}^U, \quad r = 1, 2, \dots, R. \quad (29)$$

则式(21)能够转化为实值的形式:

$$\min_{\tilde{\mathbf{w}}} \max_{m=1,2,\dots,M} \|\mathbf{G}_{f,m}^T \tilde{\mathbf{w}}\|_2 + 2\mu_g \|\tilde{\mathbf{w}}\|_2 + \delta \|\tilde{\mathbf{b}}\tilde{\mathbf{w}}\|_1, \quad (30a)$$

$$\text{s.t. } \mathbf{G}_{0,r}^T \tilde{\mathbf{w}} \geq 1 + \mu_g \|\tilde{\mathbf{w}}\|_2, \quad r = 1, 2, \dots, R, \quad (30b)$$

$$\max_{s=1,2,\dots,S} \|\mathbf{G}_{\text{SL},s}^T \tilde{\mathbf{w}}\|_2 + \mu_g \|\tilde{\mathbf{w}}\|_2 \leq \eta, \quad (30c)$$

其中,  $\tilde{\mathbf{b}} = \text{diag}\{\tilde{b}_1^{(l)}, \tilde{b}_2^{(l)}, \dots, \tilde{b}_U^{(l)}\}$  为加权系数对角阵,  $\|\cdot\|_1$  表示  $\ell_1$  范数。

为了便于 ADMM 求解, 引入以下辅助变量:

$$\alpha = \max_{m=1,2,\dots,M} \|\mathbf{G}_{f,m}^T \tilde{\mathbf{w}}\|_2;$$

$$\beta = \max_{s=1,2,\dots,S} \|\mathbf{G}_{\text{SL},s}^T \tilde{\mathbf{w}}\|_2;$$

$$\mathbf{x}_m = \mathbf{G}_{f,m}^T \tilde{\mathbf{w}}, \quad m = 1, 2, \dots, M;$$

$$\mathbf{y}_s = \mathbf{G}_{\text{SL},s}^T \tilde{\mathbf{w}}, \quad s = 1, 2, \dots, S;$$

$$z_r = \mathbf{G}_{0,r}^T \tilde{\mathbf{w}}, \quad r = 1, 2, \dots, R;$$

$$\mathbf{v} = \tilde{\mathbf{w}}; \quad \mathbf{Y} = \tilde{\mathbf{b}}\tilde{\mathbf{w}}.$$

则, 式(30)可进一步转化为

$$\min \alpha + 2\mu_g \|\mathbf{v}\|_2 + \delta \|\mathbf{Y}\|_1, \quad (31a)$$

$$\text{s.t. } 1 + \mu_g \|\mathbf{v}\|_2 - z_r + \tau_1 = 0, \quad \tau_1 \geq 0, \quad r = 1, 2, \dots, R, \quad (31b)$$

$$\beta + \mu_g \|\mathbf{v}\|_2 - \eta + \tau_2 = 0, \quad \tau_2 \geq 0. \quad (31c)$$

并引入拉格朗日乘子矢量  $\lambda_1, \xi, \varsigma, \kappa, \sigma, \gamma$  以及拉格朗日乘子  $\lambda_2$ , 根据式(31)构造拉格朗日函数如下:

$$\mathcal{L}_\rho = \alpha + \sum_{m=1}^M \xi_m^T (\mathbf{x}_m - \mathbf{G}_{f,m}^T \tilde{\mathbf{w}})$$

$$\begin{aligned} & + \frac{\rho}{2} \|\mathbf{x}_m - \mathbf{G}_{f,m}^T \tilde{\mathbf{w}}\|_2^2 + 2\mu_g \|\mathbf{v}\|_2 + \gamma^T (\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{w}}) \\ & + \frac{\rho}{2} \|\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{w}}\|_2^2 + \delta \|\mathbf{Y}\|_1 + \sigma^T (\mathbf{Y} - \tilde{\mathbf{b}}\tilde{\mathbf{w}}) \\ & + \frac{\rho}{2} \|\mathbf{Y} - \tilde{\mathbf{b}}\tilde{\mathbf{w}}\|_2^2 + \sum_{r=1}^R \lambda_{1,r} (1 + \mu_g \|\mathbf{v}\|_2 - z_r + \tau_1) \\ & + \frac{\rho}{2} (1 + \mu_g \|\mathbf{v}\|_2 - z_r + \tau_1)^2 + \kappa_r (z_r - \mathbf{G}_{0,r}^T \tilde{\mathbf{w}}) \\ & + \frac{\rho}{2} (z_r - \mathbf{G}_{0,r}^T \tilde{\mathbf{w}})^2 + \lambda_2 (\beta + \mu_g \|\mathbf{v}\|_2 - \eta + \tau_2) \\ & + \frac{\rho}{2} (\beta + \mu_g \|\mathbf{v}\|_2 - \eta + \tau_2)^2 + \sum_{s=1}^S \varsigma_s^T (\mathbf{y}_s \\ & - \mathbf{G}_{\text{SL},s}^T \tilde{\mathbf{w}}) + \frac{\rho}{2} \|\mathbf{y}_s - \mathbf{G}_{\text{SL},s}^T \tilde{\mathbf{w}}\|_2^2, \quad (32) \end{aligned}$$

其中,  $\rho$  为 ADMM 的步进值。式(30)优化问题等价于如下的对偶问题<sup>[16]</sup>:

$$\max_{\{\lambda_1, \lambda_2, \xi, \varsigma, \kappa, \sigma, \gamma\}} \min_{\{\tilde{\mathbf{w}}, \alpha, \beta, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{v}, \mathbf{Y}, \tau_1, \tau_2\}} \mathcal{L}_\rho, \quad (33a)$$

$$\text{s.t. } \|\mathbf{x}_m\|_2 \leq \alpha, \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad (33b)$$

$$\|\mathbf{y}_s\|_2 \leq \beta, \quad s = 1, 2, \dots, S. \quad (33c)$$

根据 ADMM 框架, 若在第  $t$  次迭代过程 ( $0 \leq t \leq T$ ,  $T$  为最大迭代次数), 已知权值变量  $\tilde{\mathbf{w}}^{(t)}$ , 辅助变量

$$\{\alpha^{(t)}, \beta^{(t)}, \mathbf{x}^{(t)}, \mathbf{y}^{(t)}, \mathbf{z}^{(t)}, \mathbf{v}^{(t)}, \mathbf{Y}^{(t)}, \tau_1^{(t)}, \tau_2^{(t)}\},$$

拉格朗日乘子变量

$$\{\lambda_1^{(t)}, \lambda_2^{(t)}, \xi^{(t)}, \varsigma^{(t)}, \kappa^{(t)}, \sigma^{(t)}, \gamma^{(t)}\},$$

则, 在第  $t+1$  次迭代过程交替更新各变量时, 需提取式(32)拉格朗日函数中对应的优化项并代入式(33)进行求解, 具体步骤推导如下:

步骤1 更新权值变量  $\tilde{\mathbf{w}}^{(t+1)}$

$$\tilde{\mathbf{w}}^{(t+1)} = \arg \min_{\tilde{\mathbf{w}}} \tilde{\mathbf{w}}^T \frac{\mathcal{A}}{2} \tilde{\mathbf{w}} - \tilde{\mathbf{w}}^T \mathcal{B}^{(t)}, \quad (34)$$

式(34)中,

$$\begin{aligned} \mathcal{A} = \rho \left( \sum_{m=1}^M \mathbf{G}_{f,m} \mathbf{G}_{f,m}^T + \sum_{s=1}^S \mathbf{G}_{\text{SL},s} \mathbf{G}_{\text{SL},s}^T \right. \\ \left. + \sum_{r=1}^R \mathbf{G}_{0,r} \mathbf{G}_{0,r}^T + \tilde{\mathbf{b}}^T \tilde{\mathbf{b}} + \mathbf{I}_U \right), \quad (35) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^{(t)} = \sum_{m=1}^M \mathbf{G}_{f,m} (\xi_m^{(t)} + \rho \mathbf{x}_m^{(t)}) \\ + \sum_{s=1}^S \mathbf{G}_{\text{SL},s} (\varsigma_s^{(t)} + \rho \mathbf{y}_s^{(t)}) + \sum_{r=1}^R \mathbf{G}_{0,r} (\kappa_r^{(t)} + \rho z_r^{(t)}) \\ + \tilde{\mathbf{b}}^T (\sigma^{(t)} + \rho \mathbf{Y}^{(t)}) + \gamma^{(t)} + \rho \mathbf{v}^{(t)}, \quad (36) \end{aligned}$$

且  $\mathbf{I}_U \in \mathbf{R}^{U \times U}$  为  $U$  阶单位矩阵。令式 (34) 中代价函数对  $\tilde{\mathbf{w}}$  的一阶导数为 0, 可得解:

$$\tilde{\mathbf{w}}^{(t+1)} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}^{(t)}. \quad (37)$$

步骤 2 更新辅助变量  $\{\alpha^{(t+1)}, \mathbf{x}^{(t+1)}\}$

考虑到变量  $\alpha$  与  $\mathbf{x}$  为优化相关项, 需要进行联合求解:

$$\begin{aligned} & \{\alpha^{(t+1)}, \mathbf{x}^{(t+1)}\} \\ &= \arg \min_{\{\alpha, \mathbf{x}\}} \alpha + \sum_{m=1}^M \xi_m^{(t)\top} (\mathbf{x}_m - \mathbf{G}_{f,m}^T \tilde{\mathbf{w}}^{(t+1)}) \\ & \quad + \frac{\rho}{2} \|\mathbf{x}_m - \mathbf{G}_{f,m}^T \tilde{\mathbf{w}}^{(t+1)}\|_2^2, \end{aligned} \quad (38a)$$

$$\text{s.t. } \|\mathbf{x}_m\|_2 \leq \alpha, \quad m = 1, 2, \dots, M. \quad (38b)$$

舍去式 (38a) 中与  $\{\alpha^{(t+1)}, \mathbf{x}^{(t+1)}\}$  无关的项, 将式 (38) 重新改写为

$$\begin{aligned} & \{\alpha^{(t+1)}, \mathbf{x}^{(t+1)}\} \\ &= \arg \min_{\{\alpha, \mathbf{x}\}} \alpha + \frac{\rho}{2} \sum_{m=1}^M \|\mathbf{x}_m - \mathbf{\Gamma}_{x,m}^{(t+1)}\|_2^2, \end{aligned} \quad (39a)$$

$$\text{s.t. } \|\mathbf{x}_m\|_2 \leq \alpha, \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad (39b)$$

其中,

$$\mathbf{\Gamma}_{x,m}^{(t+1)} = \mathbf{G}_{f,m}^T \tilde{\mathbf{w}}^{(t+1)} - \xi_m^{(t)}/\rho, \quad m = 1, 2, \dots, M.$$

按从小到大的顺序将  $\|\mathbf{\Gamma}_{x,m}^{(t+1)}\|_2$  划分成  $M+1$  个区间:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 &\triangleq [0, \|\mathbf{\Gamma}_{x,1}^{(t+1)}\|_2), \dots, \\ \mathbf{A}_m &\triangleq [\|\mathbf{\Gamma}_{x,m-1}^{(t+1)}\|_2, \|\mathbf{\Gamma}_{x,m}^{(t+1)}\|_2), \dots, \mathbf{A}_{M+1} \\ &\triangleq [\|\mathbf{\Gamma}_{x,M}^{(t+1)}\|_2, \infty). \end{aligned}$$

类似文献 [11] 的推导过程, 计算式 (39) 所得结果为

$$\alpha^{(t+1)} = \{\hat{\alpha} | \hat{\alpha} \in \mathbf{A}_\iota, \quad \iota = 1, 2, \dots, M+1\}, \quad (40)$$

其中, 定义符号  $[\cdot]_+$  为  $\max\{0, \cdot\}$ ,

$$\hat{\alpha} = \begin{cases} \left[ \frac{-\frac{1}{\rho} + \sum_{m=\iota}^M \|\mathbf{\Gamma}_{x,m}^{(t+1)}\|_2}{M - \iota + 1} \right]_+, & 1 \leq \iota \leq M, \\ 0, & \iota = M+1, \end{cases}$$

进一步可得:

$$\mathbf{x}_m^{(t+1)} = \begin{cases} \mathbf{\Gamma}_{x,m}^{(t+1)}, & \|\mathbf{\Gamma}_{x,m}^{(t+1)}\|_2 \leq \alpha^{(t+1)}, \\ (\mathbf{\Gamma}_{x,m}^{(t+1)} / \|\mathbf{\Gamma}_{x,m}^{(t+1)}\|_2) \alpha^{(t+1)}, & \|\mathbf{\Gamma}_{x,m}^{(t+1)}\|_2 > \alpha^{(t+1)}, \end{cases}$$

$$m = 1, 2, \dots, M. \quad (41)$$

步骤 3 更新辅助变量  $\{\beta^{(t+1)}, \mathbf{y}^{(t+1)}\}$

$$\begin{aligned} & \{\beta^{(t+1)}, \mathbf{y}^{(t+1)}\} \\ &= \arg \min_{\{\beta, \mathbf{y}\}} \lambda_2^{(t)} (\beta + \mu_g \|\mathbf{v}^{(t)}\|_2 - \eta + \tau_2^{(t)}) \\ & \quad + \frac{\rho}{2} (\beta + \mu_g \|\mathbf{v}^{(t)}\|_2 - \eta + \tau_2^{(t)})^2 \\ & \quad + \sum_{s=1}^S \varsigma_s^{(t)\top} (\mathbf{y}_s - \mathbf{G}_{\text{SL},s}^T \tilde{\mathbf{w}}^{(t+1)}) \\ & \quad + \frac{\rho}{2} \|\mathbf{y}_s - \mathbf{G}_{\text{SL},s}^T \tilde{\mathbf{w}}^{(t+1)}\|_2^2, \end{aligned} \quad (42a)$$

$$\text{s.t. } \|\mathbf{y}_s\|_2 \leq \beta, \quad s = 1, 2, \dots, S. \quad (42b)$$

为了简化运算, 舍去与求解无关的项:

$$\begin{aligned} \{\beta^{(t+1)}, \mathbf{y}^{(t+1)}\} &= \arg \min_{\{\beta, \mathbf{y}\}} (\beta - \Gamma_\beta^{(t)})^2 \\ & \quad + \sum_{s=1}^S \|\mathbf{y}_s - \mathbf{\Gamma}_{y,s}^{(t+1)}\|_2^2, \end{aligned} \quad (43a)$$

$$\text{s.t. } \|\mathbf{y}_s\|_2 \leq \beta, \quad s = 1, 2, \dots, S, \quad (43b)$$

其中,

$$\Gamma_\beta^{(t)} = \eta - \mu_g \|\mathbf{v}^{(t)}\|_2 - \tau_2^{(t)} - \lambda_2^{(t)}/\rho,$$

$$\mathbf{\Gamma}_{y,s}^{(t+1)} = \mathbf{G}_{\text{SL},s}^T \tilde{\mathbf{w}}^{(t+1)} - \varsigma_s^{(t)}/\rho, \quad s = 1, 2, \dots, S.$$

由于式 (43) 与式 (39) 问题相似, 根据步骤 2, 若将  $\|\mathbf{\Gamma}_{y,s}^{(t+1)}\|_2$  按从小到大划分为  $S+1$  个区间:  $\mathbf{\Xi}_1 \triangleq [0, \|\mathbf{\Gamma}_{y,1}^{(t+1)}\|_2), \dots, \mathbf{\Xi}_s \triangleq [\|\mathbf{\Gamma}_{y,s-1}^{(t+1)}\|_2, \|\mathbf{\Gamma}_{y,s}^{(t+1)}\|_2), \dots, \mathbf{\Xi}_{S+1} \triangleq [\|\mathbf{\Gamma}_{y,S}^{(t+1)}\|_2, \infty)$ , 同理可得式 (43) 的最优解为

$$\beta^{(t+1)} = \{\hat{\beta} | \hat{\beta} \in \mathbf{\Xi}_\chi, \quad \chi = 1, 2, \dots, S+1\}, \quad (44)$$

式 (44) 中,

$$\hat{\beta} = \begin{cases} \left[ \frac{\Gamma_\beta^{(t)} + \sum_{s=\chi}^S \|\mathbf{\Gamma}_{y,s}^{(t+1)}\|_2}{S - \chi + 2} \right]_+, & 1 \leq \chi \leq S, \\ [\mathbf{\Gamma}_{y,s}^{(t+1)}]_+, & \chi = S+1, \end{cases}$$

进一步得到:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_s^{(t+1)} &= \begin{cases} \mathbf{\Gamma}_{y,s}^{(t+1)}, & \|\mathbf{\Gamma}_{y,s}^{(t+1)}\|_2 \leq \beta^{(t+1)}, \\ \left( \frac{\mathbf{\Gamma}_{y,s}^{(t+1)}}{\|\mathbf{\Gamma}_{y,s}^{(t+1)}\|_2} \right) \beta^{(t+1)}, & \|\mathbf{\Gamma}_{y,s}^{(t+1)}\|_2 > \beta^{(t+1)}, \end{cases} \\ & \quad s = 1, 2, \dots, S. \end{aligned} \quad (45)$$

步骤4 更新辅助变量  $\mathbf{z}^{(t+1)}$

$$\begin{aligned} & \mathbf{z}^{(t+1)} \\ = & \arg \min_{\mathbf{z}} \sum_{r=1}^R \lambda_{1,r}^{(t)} (1 + \mu_g \|\mathbf{v}^{(t)}\|_2 - z_r + \tau_1^{(t)}) \\ & + \frac{\rho}{2} (1 + \mu_g \|\mathbf{v}^{(t)}\|_2 - z_r + \tau_1^{(t)})^2 \\ & + \sum_{r=1}^R \kappa_r^{(t)} (z_r - \mathbf{G}_{0,r}^T \tilde{\mathbf{w}}^{(t+1)}) \\ & + \frac{\rho}{2} (z_r - \mathbf{G}_{0,r}^T \tilde{\mathbf{w}}^{(t+1)})^2. \end{aligned} \quad (46)$$

对式(46)做进一步化简:

$$\mathbf{z}^{(t+1)} = \arg \min_{\mathbf{z}} \sum_{r=1}^R (z_r - \hat{\Gamma}_{z,r}^{(t)})^2 + (z_r - \bar{\Gamma}_{z,r}^{(t+1)})^2, \quad (47)$$

式(47)中,  $\hat{\Gamma}_{z,r}^{(t)} = 1 + \mu_g \|\mathbf{v}^{(t)}\|_2 + \tau_1^{(t)} + \lambda_{1,r}^{(t)}/\rho$ ,  $\bar{\Gamma}_{z,r}^{(t+1)} = \mathbf{G}_{0,r}^T \tilde{\mathbf{w}}^{(t+1)} - \kappa_r^{(t)}/\rho$ ,  $r = 1, 2, \dots, R$ . 将式(47)拆分为  $R$  个独立子问题, 容易求得每个子问题的解:

$$z_r^{(t+1)} = (\hat{\Gamma}_{z,r}^{(t)} + \bar{\Gamma}_{z,r}^{(t+1)})/2, \quad r = 1, 2, \dots, R. \quad (48)$$

步骤5 更新辅助变量  $\mathbf{Y}^{(t+1)}$

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}^{(t+1)} = & \arg \min_{\mathbf{Y}} \delta \|\mathbf{Y}\|_1 + \boldsymbol{\sigma}^{(t)T} (\mathbf{Y} - \tilde{\mathbf{b}} \tilde{\mathbf{w}}^{(t+1)}) \\ & + \frac{\rho}{2} \|\mathbf{Y} - \tilde{\mathbf{b}} \tilde{\mathbf{w}}^{(t+1)}\|_2^2. \end{aligned} \quad (49)$$

等价于求解如下问题:

$$\mathbf{Y}^{(t+1)} = \arg \min_{\mathbf{Y}} \delta \|\mathbf{Y}\|_1 + \frac{\rho}{2} \|\mathbf{Y} - \Gamma_Y^{(t+1)}\|_2^2, \quad (50)$$

式(50)中,  $\Gamma_Y^{(t+1)} = \tilde{\mathbf{b}} \tilde{\mathbf{w}}^{(t+1)} - \boldsymbol{\sigma}^{(t)}/\rho$ . 式(50)为典型的  $\ell_1 + \ell_2^2$  范数凸优化问题, 可求得其软阈值解<sup>[17]</sup>:

$$\begin{aligned} Y_u^{(t+1)} = & \text{sign}(\Gamma_{Y,u}^{(t+1)}) [|\Gamma_{Y,u}^{(t+1)}| - \delta/\rho]_+, \\ & u = 1, 2, \dots, U, \end{aligned} \quad (51)$$

式(51)中,  $\text{sign}(\cdot)$  表示符号函数.

步骤6 更新辅助变量  $\mathbf{v}^{(t+1)}$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^{(t+1)} = & \\ & \arg \min_{\mathbf{v}} 2\mu_g \|\mathbf{v}\|_2 + \gamma^{(t)T} (\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{w}}^{(t+1)}) \\ & + \frac{\rho}{2} \|\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{w}}^{(t+1)}\|_2^2 \\ & + \sum_{r=1}^R \lambda_{1,r}^{(t)} (1 + \mu_g \|\mathbf{v}\|_2 - z_r^{(t+1)} + \tau_1^{(t)}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + \frac{\rho}{2} (1 + \mu_g \|\mathbf{v}\|_2 - z_r^{(t+1)} + \tau_1^{(t)})^2 \\ & + \lambda_2^{(t)} (\beta^{(t+1)} + \mu_g \|\mathbf{v}\|_2 - \eta + \tau_2^{(t)}) \\ & + \frac{\rho}{2} (\beta^{(t+1)} + \mu_g \|\mathbf{v}\|_2 - \eta + \tau_2^{(t)})^2. \end{aligned} \quad (52)$$

式(52)可转化为  $\ell_2 + \ell_2^2$  结构的优化问题:

$$\mathbf{v}^{(t+1)} = \arg \min_{\mathbf{v}} \psi^{(t+1)} \|\mathbf{v}\|_2 + \frac{\rho}{2} \|\mathbf{v} - \Gamma_v^{(t+1)}\|_2^2, \quad (53)$$

式(53)中,  $\psi^{(t+1)} = \mu_g [2 + \lambda_2^{(t)} + \rho(R\tau_1^{(t)} + \tau_2^{(t)} + \beta^{(t+1)} + R - \eta) + \sum_{r=1}^R (\lambda_{1,r}^{(t)} - \rho z_r^{(t+1)})] / [1 + \mu_g^2(1 + R)]$ ,  $\Gamma_v^{(t+1)} = (\tilde{\mathbf{w}}^{(t+1)} - \gamma^{(t)}/\rho) / [1 + \mu_g^2(1 + R)]$ . 根据附录A, 通过微分运算可求得其最优解:

$$\mathbf{v}^{(t+1)} = \begin{cases} \Gamma_v^{(t+1)} [\hat{\Upsilon}]_+, & \|\Gamma_v^{(t+1)}\|_2 \neq 0, \\ \mathbf{0}_U, & \|\Gamma_v^{(t+1)}\|_2 = 0, \end{cases} \quad (54)$$

其中,  $\hat{\Upsilon} = (\|\Gamma_v^{(t+1)}\|_2 - \psi^{(t+1)}/\rho) / \|\Gamma_v^{(t+1)}\|_2$ .

步骤7 更新辅助变量  $\tau_1^{(t+1)}$

$$\begin{aligned} \tau_1^{(t+1)} = & \arg \min_{\tau_1 \geq 0} \sum_{r=1}^R \lambda_{1,r}^{(t)} (1 + \mu_g \|\mathbf{v}^{(t+1)}\|_2 \\ & - z_r^{(t+1)} + \tau_1) + \frac{\rho}{2} (1 + \mu_g \|\mathbf{v}^{(t+1)}\|_2 \\ & - z_r^{(t+1)} + \tau_1)^2. \end{aligned} \quad (55)$$

易求得其最优解为

$$\begin{aligned} \tau_1^{(t+1)} = & \left[ -1 - \mu_g \|\mathbf{v}^{(t+1)}\|_2 \right. \\ & \left. + \sum_{r=1}^R (z_r^{(t+1)} - \lambda_{1,r}^{(t)}/\rho) / R \right]_+. \end{aligned} \quad (56)$$

步骤8 更新辅助变量  $\tau_2^{(t+1)}$

$$\begin{aligned} \tau_2^{(t+1)} = & \arg \min_{\tau_2 \geq 0} \lambda_2^{(t)} (\beta^{(t+1)} + \mu_g \|\mathbf{v}^{(t+1)}\|_2 - \eta \\ & + \tau_2) + \frac{\rho}{2} (\beta^{(t+1)} + \mu_g \|\mathbf{v}^{(t+1)}\|_2 - \eta + \tau_2)^2. \end{aligned} \quad (57)$$

类似步骤7, 可求得最优解为

$$\tau_2^{(t+1)} = [\eta - \beta^{(t+1)} - \mu_g \|\mathbf{v}^{(t+1)}\|_2 - \lambda_2^{(t)}/\rho]_+. \quad (58)$$

步骤9 更新拉格朗日乘子变量  $\{\boldsymbol{\lambda}_1^{(t+1)}, \lambda_2^{(t+1)}, \boldsymbol{\xi}^{(t+1)}, \boldsymbol{\varsigma}^{(t+1)}, \boldsymbol{\kappa}^{(t+1)}, \boldsymbol{\sigma}^{(t+1)}, \boldsymbol{\gamma}^{(t+1)}\}$

$$\begin{aligned} \lambda_{1,r}^{(t+1)} = & \lambda_{1,r}^{(t)} + \rho (1 + \mu_g \|\mathbf{v}^{(t+1)}\|_2 - z_r^{(t+1)} \\ & + \tau_1^{(t+1)}), \quad r = 1, 2, \dots, R, \end{aligned} \quad (59a)$$

$$\begin{aligned} \lambda_2^{(t+1)} = & \lambda_2^{(t)} + \rho (\beta^{(t+1)} + \mu_g \|\mathbf{v}^{(t+1)}\|_2 \\ & - \eta + \tau_2^{(t+1)}), \end{aligned} \quad (59b)$$

$$\boldsymbol{\xi}_m^{(t+1)} = \boldsymbol{\xi}_m^{(t)} + \rho(\mathbf{x}_m^{(t+1)} - \mathbf{G}_{f,m}^T \tilde{\mathbf{w}}^{(t+1)}), \quad r = 1, 2, \dots, R, \quad (59e)$$

$$m = 1, 2, \dots, M, \quad (59c)$$

$$\boldsymbol{\varsigma}_s^{(t+1)} = \boldsymbol{\varsigma}_s^{(t)} + \rho(\mathbf{y}_s^{(t+1)} - \mathbf{G}_{\text{SL},s}^T \tilde{\mathbf{w}}^{(t+1)}),$$

$$s = 1, 2, \dots, S, \quad (59d)$$

$$\boldsymbol{\kappa}_r^{(t+1)} = \boldsymbol{\kappa}_r^{(t)} + \rho(z_r^{(t+1)} - \mathbf{G}_{0,r}^T \tilde{\mathbf{w}}^{(t+1)}),$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{(t+1)} = \boldsymbol{\sigma}^{(t)} + \rho(\mathbf{Y}^{(t+1)} - \tilde{\mathbf{b}} \tilde{\mathbf{w}}^{(t+1)}), \quad (59f)$$

$$\boldsymbol{\gamma}^{(t+1)} = \boldsymbol{\gamma}^{(t)} + \rho(\mathbf{v}^{(t+1)} - \tilde{\mathbf{w}}^{(t+1)}). \quad (59g)$$

交替更新步骤1~步骤9中的各变量, 并设置ADMM迭代停止条件为

$$\frac{(\alpha^{(t+1)} + 2\mu_g \|\mathbf{v}^{(t+1)}\|_2 + \delta \|\mathbf{Y}^{(t+1)}\|_1) - (\alpha^{(t)} + 2\mu_g \|\mathbf{v}^{(t)}\|_2 + \delta \|\mathbf{Y}^{(t)}\|_1)}{\alpha^{(t)} + 2\mu_g \|\mathbf{v}^{(t)}\|_2 + \delta \|\mathbf{Y}^{(t)}\|_1} \leq \vartheta, \quad (60)$$

或达到最大迭代次数 $T$ , 其中 $\vartheta$ 为设定的收敛控制参数。

综上, 针对式(21)优化问题的ADMM求解过程如表1所示。

表1 优化问题式(21)的ADMM求解步骤

Table 1 ADMM solution steps for the optimization problem (21)

输入:	零抽头索引 $\mathbf{D}^{(l)}$ , 加权矢量 $\mathbf{b}^{(l)}$ , 导向矢量 $\mathbf{g}_f, \mathbf{g}_{\text{SL}}, \mathbf{g}_0$ 。
初始化:	1. 计算非零位置 $\bar{\mathbf{D}}^{(l)} = \mathbf{X} - \mathbf{D}^{(l)}$ , 根据式(26)~式(29)更新加权矩阵 $\tilde{\mathbf{b}}$ 与导向矩阵 $\mathbf{G}_f, \mathbf{G}_{\text{SL}}, \mathbf{G}_0$ ; 2. 步进值 $\rho$ , 收敛参数 $\vartheta$ , 稀疏系数 $\delta$ , 旁瓣响应约束 $\eta$ , 最大迭代次数 $T$ ; 3. $t = 0$ , 权值变量 $\tilde{\mathbf{w}}^{(0)}$ , 辅助变量 $\{\alpha^{(0)}, \beta^{(0)}, \mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{y}^{(0)}, \mathbf{z}^{(0)}, \mathbf{v}^{(0)}, \mathbf{Y}^{(0)}, \tau_1^{(0)}, \tau_2^{(0)}\}$ , 拉格朗日乘子变量 $\{\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \boldsymbol{\xi}^{(0)}, \boldsymbol{\varsigma}^{(0)}, \boldsymbol{\kappa}^{(0)}, \boldsymbol{\sigma}^{(0)}, \boldsymbol{\gamma}^{(0)}\}$ 。
迭代过程:	1. 根据式(35)与式(36)求得 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}^{(t)}$ , 并通过式(37)更新 $\tilde{\mathbf{w}}^{(t+1)}$ ; 2. 根据式(40)及式(41)分别得到 $\alpha^{(t+1)}$ 与 $\mathbf{x}_m^{(t+1)} (m = 1, 2, \dots, M)$ ; 3. 通过式(44)和式(45)分别求得最优解 $\beta^{(t+1)}$ 与 $\mathbf{y}_s^{(t+1)} (s = 1, 2, \dots, S)$ ; 4. 利用式(48)计算得到 $\mathbf{z}^{(t+1)}$ ; 5. 根据式(51)得到软阈值解 $\mathbf{Y}^{(t+1)}$ ; 6. 通过附录A中的式(63)得到 $\hat{\mathbf{Y}}$ 的表达式, 进而利用式(54)求得解 $\mathbf{v}^{(t+1)}$ ; 7. 经式(56)得到辅助变量 $\tau_1^{(t+1)}$ ; 8. 经式(58)求得辅助变量 $\tau_2^{(t+1)}$ ; 9. 利用式(59a)~式(59g)更新拉格朗日乘子 $\{\lambda_1^{(t+1)}, \lambda_2^{(t+1)}, \boldsymbol{\xi}^{(t+1)}, \boldsymbol{\varsigma}^{(t+1)}, \boldsymbol{\kappa}^{(t+1)}, \boldsymbol{\sigma}^{(t+1)}, \boldsymbol{\gamma}^{(t+1)}\}$ ; 10. $t = t + 1$ ; 11. 重复执行1~10步, 直至满足式(60)或 $t = T$ 时停止迭代。
输出:	权值最优解 $\tilde{\mathbf{w}}^*$ 。

需要注意的是, 本文所提稀疏算法由式(10)与式(11)两部分优化问题构成。对于式(10)的凸近似问题, 表1给出了相应的求解步骤。而使用ADMM求解式(11)的凸近似问题时无需考虑  $l_1$  范数项, 因此仅需去掉表1中变量  $\mathbf{b}, \mathbf{Y}, \boldsymbol{\sigma}$  的计算部分即可, 此处不再赘述。

## 4 仿真实验

### 4.1 波束形成性能分析

本节将针对所提稀疏算法、现有稀疏算法<sup>[8]</sup>与非鲁棒算法进行对比分析。这里, 非鲁棒算法指的是设计中不考虑传声器失配误差影响, 即在式(9)中采用理想导向矢量计算权值。

考虑由  $K = 10$  阵元组成的均匀线阵, 每个阵

元后接  $N = 5$  个 FIR 滤波器, 每个滤波器有  $J = 30$  个抽头。阵元间距  $d = 0.04$  m, 声速  $c = 340$  m/s, 信号采样频率  $f_s = 8000$  Hz。设各阵元的增益、相位、位置误差范围分别为  $\Delta a_k \in [-0.1, 0.1]$ 、 $\Delta \varphi_k \in [-5^\circ, 5^\circ]$  及  $\Delta d_k \in [-3, 3]$  mm; 误差均值上界分别为  $\mu_a = 1 \times 10^{-6}$ ,  $\mu_\varphi = 8.73 \times 10^{-7}$ ,  $\mu_d = 3 \times 10^{-8}$ 。设频率范围  $\Omega = [1000, 3500]$  Hz, 参考频率  $f_0 = 3000$  Hz, 调向角度范围  $\Phi = [40^\circ, 140^\circ]$ , 主瓣宽度与过渡带宽度均为  $20^\circ$ ; 取频率范围  $\Omega$ , 调向角度范围  $\Phi$ , 主瓣范围  $\Theta_{\text{ML}}$ , 旁瓣范围  $\Theta_{\text{SL}}$  的离散点数分别为  $H = 51$ 、 $R = 6$ 、 $\hat{Q} = 11$ 、 $\bar{Q} = 36$ 。对式(10)的迭代次数  $L = 5$ , 加权矢量常参  $\varepsilon_0 = 1 \times 10^{-6}$ , 稀疏系数  $\delta = 1 \times 10^{-6}$ , 稀疏门限值  $\varepsilon_D = 1 \times 10^{-6}$ , ADMM 最大迭代次数  $T = 300$ ,

步进值  $\rho = 0.01$ , 收敛参数  $\vartheta = 1 \times 10^{-6}$ 。旁瓣响应约束值  $\eta = -10$  dB, 为了公平比较, 在现有稀疏算法与非鲁棒算法中, 同样添加了对指向角度响应及旁瓣响应的约束条件。

在图3与图4中分别给出了调向角度  $\phi_d = 60^\circ$  及  $\phi_d = 90^\circ$  下三种算法设计的波束方向图及其侧视图, 所得波束图为1000次蒙特卡洛实验的平均结果。

由图3和图4可以看出, 与鲁棒算法设计的波束图相比, 在失配误差条件下, 非鲁棒算法所得波束图在各调向角度下均发生严重畸变, 尤其在低频部分更为敏感, 已基本丧失了空域滤波能力。为了进一步评价不同算法的鲁棒特性, 图5给出了调向角度分别为  $\phi_d = 60^\circ$  及  $\phi_d = 90^\circ$  时, 各算法的白噪声增益 (White noise gain, WNG)<sup>[7]</sup> 随频率的变化曲线。

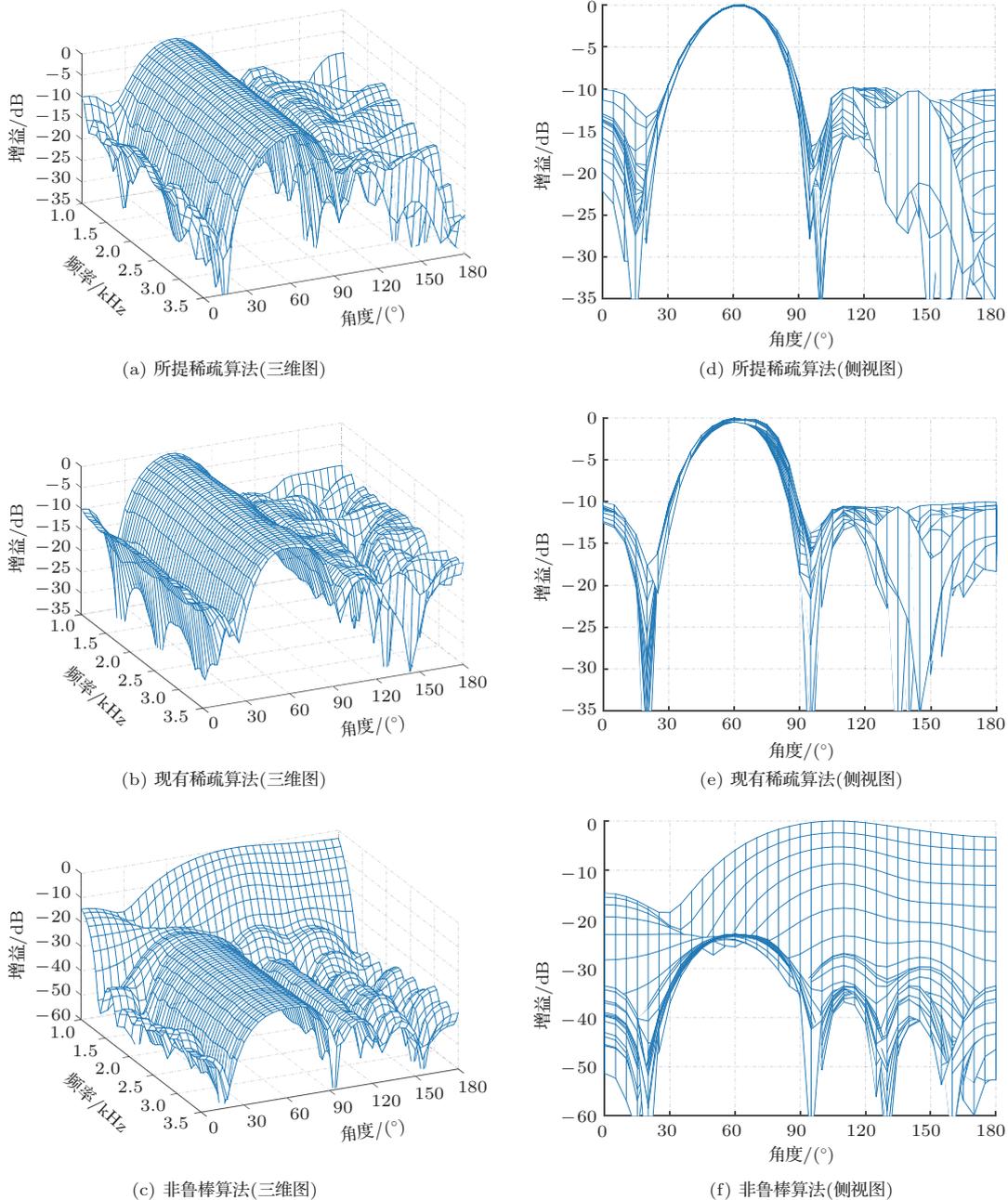


图3 不同算法在期望调向  $60^\circ$  的波束图

Fig. 3 Beampatterns of different algorithms for the look direction of  $60^\circ$

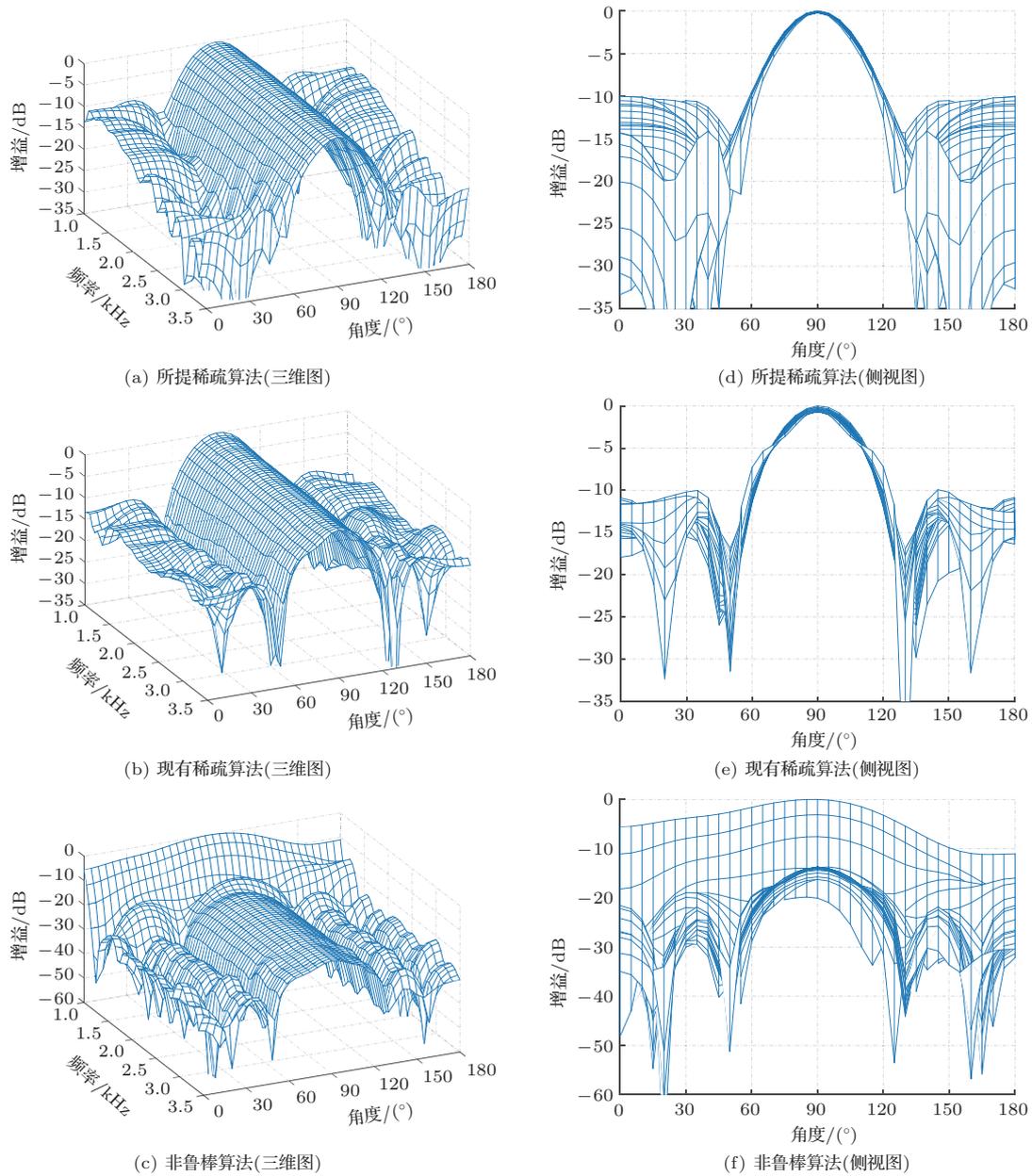


图4 不同算法在期望调向90°的波束图

Fig. 4 Beampatterns of different algorithms for the look direction of 90°

从图5可以看出,非鲁棒算法在低频处的WNG很低,意味着其在低频处对传声器失配误差非常敏感,因此造成了低频处方向图的严重畸变。相比较,由于稀疏算法考虑到了传声器失配误差的影响,低频处的WNG要明显高于非鲁棒算法,使得波束图受传声器失配误差的影响更小。另外,相较于现有稀疏算法,所提稀疏算法在调向角度60°与90°下的WNG整体表现更优。这表明所提改进算法在WCMP鲁棒设计的基础上,通过引入求解自由度更高的MSRV设计,能够具备更佳的抵抗噪声干扰

能力。

其次,针对两种鲁棒的稀疏算法而言,由图3与图4所示波束图能够看出,相较于现有稀疏算法,所提稀疏算法的波束图在不同调向角度下具备了更佳的恒定束宽性能。为了定量评价恒定束宽性能,这里引入主瓣响应的最大波动指标<sup>[18]</sup>,其定义为主瓣区域内最大波束图增益与最小波束图增益的差值,该指标越小表明波束图的恒定束宽性能越好。对比两种稀疏算法的最大主瓣波动值可知,当波束指向为 $\phi_d = 60^\circ$ 时,所提算法的最大主瓣波动

值为0.14 dB (波束图对应图3(d)), 要优于现有稀疏算法的1.07 dB (波束图对应图3(e)); 当波束指向为 $\phi_d = 90^\circ$ 时, 所提算法的最大主瓣波动值为0.61 dB (波束图对应图4(d)), 也要优于现有稀疏算法的1.14 dB (波束图对应图4(e))。这一结果说明, 所提稀疏算法采用MSRV设计有效改善了多项式结构波束形成器的恒定束宽性能。

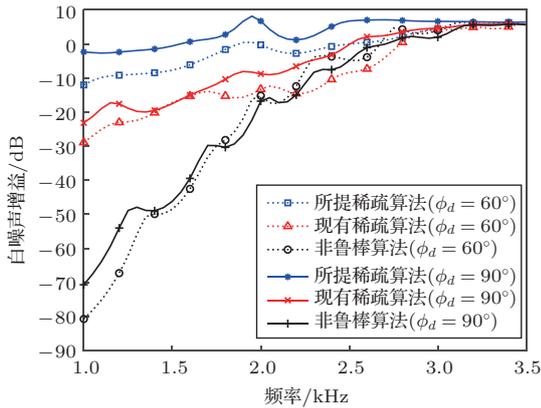


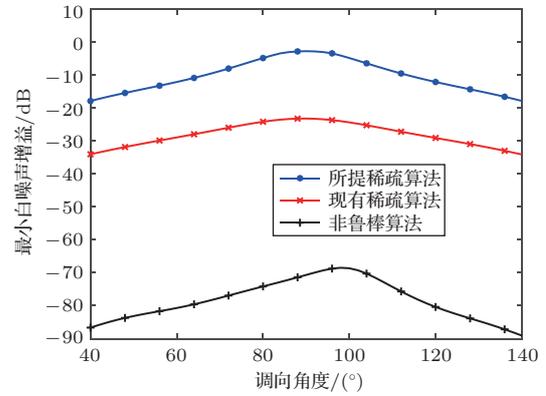
图5 不同算法在 $\phi_d = 60^\circ$ 及 $\phi_d = 90^\circ$ 下的频率-WNG变化

Fig. 5 Frequency-WNG variation of different algorithms at  $\phi_d = 60^\circ$  and  $\phi_d = 90^\circ$

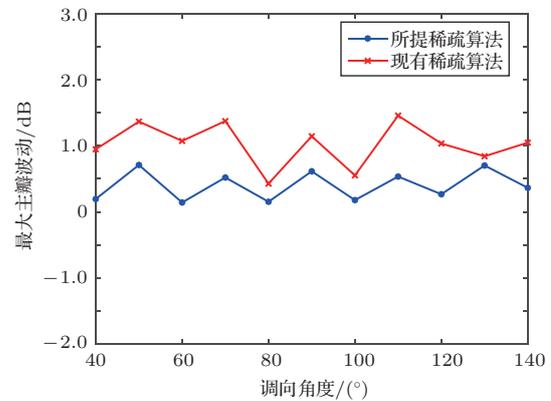
为了进一步在不同指向角度下, 对各算法的鲁棒特性及恒定束宽性能进行对比分析, 在图6中分别给出了最小WNG与最大主瓣波动随调向角度的变化曲线。此处, 最小WNG(取频率范围内最小值)反映了各算法对低频范围的敏感程度。

由图6(a)可以看出, 在整个主瓣调向范围内, 稀疏算法的最小WNG均要显著高于非鲁棒算法。具体地, 与非鲁棒算法相比, 现有稀疏算法的最小WNG在调向角度范围内能够提高44.32~55.02 dB; 而所提稀疏算法的最小WNG较现有稀疏算法则可以进一步提升16.19~20.46 dB。由于非鲁棒算法受传声器失配误差影响较大, 其最大主瓣波动明显高于稀疏算法, 因此图6(b)只给出了稀疏算法最大主瓣波动的比较结果。由图6(b)可知, 在整个主瓣调向范围内, 所提稀疏算法的恒定束宽特性整体上均优于现有稀疏算法, 其中, 所提稀疏算法的最大主瓣波动的最大值为0.71 dB, 而现有稀疏算法表现较差, 其最大值达到了1.46 dB。这表明所提稀疏算法将MSRV设计与鲁棒WCMP准则相结合, 所构造的多项式结构波束形成器, 在不同调向角度下均

能保证良好的鲁棒性, 同时具备了更佳的恒定束宽性能。



(a) 调向角度-最小WNG变化



(b) 调向角度-最大主瓣波动变化

图6 不同算法在调向角度范围内的最小WNG与最大主瓣波动变化

Fig. 6 Minimum WNG and maximum mainlobe fluctuation variation of different algorithms within the range of steering angle

## 4.2 优化效率分析

本节将针对ADMM求解的所提稀疏算法与CVX求解的现有稀疏算法, 从权值抽头稀疏度与运行时间两方面进行算法优化效率的对比, 实验均在Intel(R) Core(TM) i5-11300H@3.10 GHz的计算机配置下进行。

首先给出 $K = 10$ 、 $N = 5$ 、 $J = 30$ 维数下的多项式结构波束形成器稀疏抽头位置分布情况, 即对应于4.1节所讨论的仿真条件。结果如图7所示, 其中图7(a)为现有稀疏算法得到的稀疏抽头位置分布图, 稀疏抽头的总数为400; 图7(b)为本文所提稀疏算法得到的稀疏抽头位置分布图, 稀疏抽头的总数为590。相比较, 所提稀疏算法多稀疏了12.66%的抽头。这是由于MSRV设计提高了求解自由度,

而将 MSR<sub>V</sub> 与迭代加权  $l_1$  稀疏方法结合则为抽头潜在稀疏位置的增加提供了可能性。

为了进一步分析多项式结构波束形成器维数变化对算法优化效率的影响, 设置多项式结构宽带

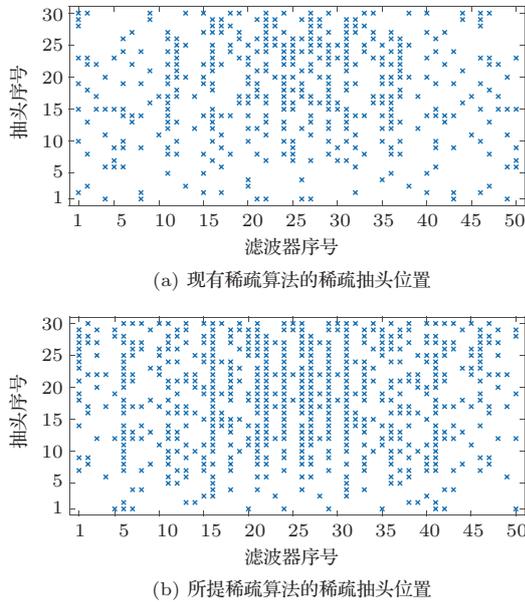


图 7 不同算法所设计波束形成器的稀疏抽头位置分布  
Fig. 7 Distribution of sparse tap positions in beamformers designed by different algorithms

波束形成器的阵元数  $K = 9$ 、 $K = 10$ , FIR 滤波器个数  $N = 5$ 、 $N = 6$ , 每个滤波器的抽头数  $J = 30$ 、 $J = 40$ , 其余参数设置与 4.1 节相同。表 2 则给出了所提稀疏算法与现有稀疏算法在稀疏权值抽头数和运行时间两方面的数据对比情况。此处定义权值稀疏度为稀疏抽头数与总抽头数的比值, 其中总抽头数为  $K \times N \times J$ 。

由表 2 可知, 在不同波束形成器维数下, 所提稀疏算法的权值稀疏度始终高于现有稀疏算法, 且平均有 11.08% 的稀疏度提升。同时, 维数增加将导致现有稀疏算法使用 CVX 的计算耗时明显增加, 而所提稀疏算法使用 ADMM 耗时受影响较小, 能够减少两个数量级且仅占 CVX 求解的 0.69%~1.09%。当波束形成器维数较高时, 如  $10 \times 6 \times 40$  的维数下, 表格中“—”表示 CVX 已无法求解, 而 ADMM 仅有 396.53 s 的运行时长。总的来说, 得益于求解自由度更高的 MSR<sub>V</sub> 设计, 使用 ADMM 求解稀疏凸问题, 能够稀疏掉更多的冗余抽头; 同时, 利用 ADMM 分布并行式求解的特性, 可以极大程度地减少耗时, 节省运算资源, 且系统规模越大维数越高的情况下其高效计算的优势更为明显。

表 2 不同算法的优化效率对比  
Table 2 Optimization efficiency comparison of different algorithms

阵元数	滤波器个数	抽头数	稀疏抽头数/稀疏度		运行时间/s	
			现有稀疏算法	所提稀疏算法	现有稀疏算法	所提稀疏算法
9	5	30	361/26.74%	519/38.44%	25622.56	279.53
		40	586/32.56%	818/45.44%	41766.25	321.02
	6	30	581/35.86%	755/46.60%	31873.18	292.92
		40	929/43.01%	1154/53.43%	50542.43	348.59
10	5	30	400/26.67%	590/39.33%	31976.13	299.24
		40	715/35.75%	914/45.70%	47550.22	335.77
	6	30	700/38.89%	866/48.11%	37868.94	311.57
		40	—/—	1278/53.25%	—	396.53

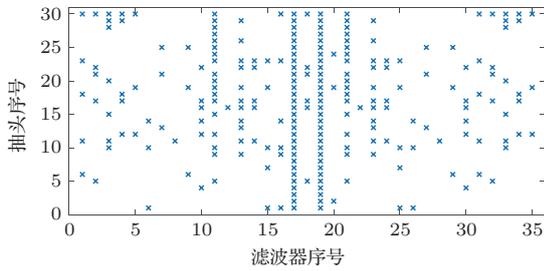
### 5 实测实验

本节将通过实测实验比较所提稀疏算法与现有稀疏算法的性能表现。同文献 [7] 和文献 [11], 实测实验在尺寸为  $5.5 \text{ m} \times 3.3 \text{ m} \times 2.4 \text{ m}$  的消声室中进行, 采用阵元间距为 4 cm 的 7 阵元均匀线阵。声源距阵列中心为 2.5 m, 声源由频率为 1500 Hz、2000 Hz、2500 Hz、3000 Hz、3500 Hz 的正弦波信号

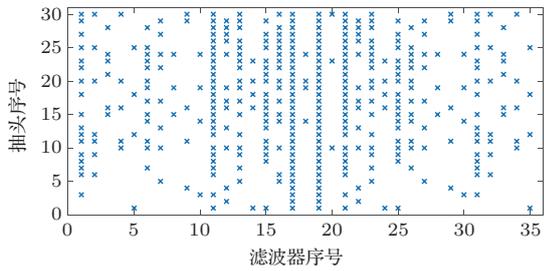
混合构成。采用美国国家仪器 (NI) 的 NI USB-6363 型号数据采集卡进行传声器信号采集, 采样率为 8000 Hz。在多项式结构波束形成器设计中, 设置 FIR 滤波器个数  $N = 5$ , 每个滤波器抽头数  $J = 30$ , 其余参数设置与 4.1 节相同。

首先给出两种稀疏算法所设计波束形成器的稀疏抽头分布情况, 如图 8 所示。现有稀疏算法的稀疏度为 22.57%, 而所提算法的稀疏抽头位置分

布更广,其稀疏度为36.67%,相较现有算法提高了14.10%的稀疏度。



(a) 现有稀疏算法的稀疏抽头位置



(b) 所提稀疏算法的稀疏抽头位置

图8 两种算法所设计波束形成器的稀疏抽头位置分布

Fig. 8 Distribution of sparse tap positions in beamformers designed by two algorithms

为了进一步定量分析各算法在实测环境中的波束形成器性能,定义输出输入信号幅度比(Beamformer output to microphone signal ratio, BOMSR)为波束形成器在频域内输出信号与参考阵元的输入信号的频谱幅度比<sup>[5]</sup>。对于期望方向入射的信号,幅度比越接近1,表明波束形成器的信号无失真效果越好;对于旁瓣方向入射的信号,幅度比越接近0,则表明波束形成器对噪声干扰抑制的能力更强。

针对所提稀疏算法与现有稀疏算法设计两组实测实验:由表3分别给出声源在期望90°入射与旁瓣40°入射的实测实验结果;表4分别给出声源在期望110°入射与旁瓣60°入射的实测实验结果。所得实验结果均为实测环境中40次测量的平均结果。

由表3可知,当声源从期望方向90°入射时,现有算法与所提算法的平均BOMSR分别为0.8759和1.0322,说明所提算法对期望信号无失真处理的平均水平更高;且相较于现有算法,所提算法在各频率点处的BOMSR更接近1,表明所提算法对不同频率信号的无失真处理能力更强。当声源从旁瓣方向40°入射时,由于4.1节仿真实验中设置了旁瓣响

应约束值为-10 dB,即输出输入幅度比最大值应不超过0.3162。可知现有算法在1500 Hz低频处不满足旁瓣响应约束,这是因为,与所提算法相比,现有算法在低频范围的WNG表现较差,可能导致抑制旁瓣信号的能力变弱;而所提算法由于受失配误差影响较小,则在各频率点均能满足设计要求。

表3 实验一中不同算法的输出输入频谱幅度比  
Table 3 BOMSR of different algorithms in the first experiment

声源入射角度	频率/Hz	现有稀疏算法	所提稀疏算法
90° (期望方向)	1500	1.2591	1.2577
	2000	0.7736	0.9934
	2500	0.7708	0.9407
	3000	0.8110	0.9692
	3500	0.7650	1.0001
40° (旁瓣方向)	1500	0.6487	0.0271
	2000	0.0940	0.0496
	2500	0.1833	0.1974
	3000	0.1320	0.1050
	3500	0.1411	0.0990

表4 实验二中不同算法的输出输入频谱幅度比  
Table 4 BOMSR of different algorithms in the second experiment

声源入射角度	频率/Hz	现有稀疏算法	所提稀疏算法
110° (期望方向)	1500	1.2654	1.2640
	2000	0.4988	0.9073
	2500	0.6348	0.8506
	3000	0.7169	0.9794
	3500	0.7834	1.0330
60° (旁瓣方向)	1500	0.1651	0.0292
	2000	0.0693	0.0534
	2500	0.1376	0.2126
	3000	0.1772	0.1131
	3500	0.1402	0.1066

在表4中,类似对表3的分析,对期望110°入射的声源,现有算法与所提算法的平均BOMSR分别为0.7799和1.0069,这表明所提算法对无失真处理信号的平均性能更优,且所提算法在各频率点处的BOMSR同样表现更好。对于从旁瓣60°入射的声源,两种稀疏算法的BOMSR均低于0.3162,能够满足设计要求。因此,综合分析两组实测数据可知,与

现有稀疏算法相比,所提稀疏算法在满足旁瓣响应约束要求的同时,表现出了更佳的期望方向信号无失真特性。

## 6 结论

本文提出了一种多项式结构恒定束宽波束形成器的高效稀疏化设计方法,在现有稀疏算法的基础上,通过引入求解自由度更高的MSRV设计,改善了多项式结构波束形成器的恒定束宽性能,同时利用迭代加权 $l_1$ 范数进行抽头稀疏优化,并采用ADMM求解算法进一步提高了优化的效率。研究结果表明,相较于现有稀疏算法,所提稀疏算法在不同指向角度下的主瓣频率不变特性更优,同时也保持了良好的设计鲁棒性。另外,将具有更高求解自由度的MSRV设计与抽头稀疏优化问题结合,有利于挖掘更多潜在的稀疏抽头。对比现有的利用经典CVX工具箱进行优化的稀疏设计,本文提出的ADMM稀疏设计方法取得了更高的稀疏度,且优化求解的耗时可以降低两个数量级。

## 参 考 文 献

- [1] Son P L. Irregular microphone array design for broadband beamforming[J]. *Signal Processing*, 2022, 193: 108431.
- [2] 李涛, 蒋小勇, 周胜增. 基于宽带稳健STMV波束形成的相关检测方法[J]. *声学技术*, 2019, 38(5): 600–603.  
Li Tao, Jiang Xiaoyong, Zhou Shengzeng. Correlation detection based on wideband robust STMV beamforming[J]. *Technical Acoustics*, 2019, 38(5): 600–603.
- [3] Wang X, Cohen I, Chen J, et al. On robust and high directive beamforming with small-spacing microphone arrays for scattered sources[J]. *IEEE/ACM Transactions on Audio, Speech, and Language Processing*, 2019, 27(4): 842–852.
- [4] 任维怡, 陈华伟, 鲍彧. 稳健宽带波束形成器设计的低阶统计量法[J]. *应用声学*, 2015, 34(5): 413–424.  
Ren Weiyi, Chen Huawei, Bao Yu. Design of robust broadband beamformers based on lower-order statistics method[J]. *Journal of Applied Acoustics*, 2015, 34(5): 413–424.
- [5] Bao Y, Chen H. A chance-constrained programming approach to the design of robust broadband beamformers with microphone mismatches[J]. *IEEE/ACM Transactions on Audio, Speech, and Language Processing*, 2018, 26(12): 2475–2488.
- [6] Barfuss H, Bachmann M, Buerger M, et al. Design of robust two-dimensional polynomial beamformers as a convex optimization problem with application to robot audition[C]//2017 IEEE Workshop on Applications of Signal Processing to Audio and Acoustics. IEEE, 2017: 106–110.
- [7] 薛晗, 陈华伟, 张展, 等. 多项式结构宽带波束形成器的性能分析及其改进[J]. *声学学报*, 2022, 47(3): 293–308.  
Xue Han, Chen Huawei, Zhang Zhan, et al. Performance analysis and improvement of polynomial broadband beamformers[J]. *Acta Acustica*, 2022, 47(3): 293–308.
- [8] Wang T, Chen H. Robust design of Farrow-structure-based steerable broadband beamformers with sparse tap weights via convex optimization[J]. *EURASIP Journal on Audio, Speech, and Music Processing*, 2015, 2015(1): 14.
- [9] Frank A, Ben-Kish A, Cohen I. Constant-beamwidth linearly constrained minimum variance beamformer[C]//2022 30th European Signal Processing Conference. IEEE, 2022: 50–54.
- [10] 鄢社锋, 王文侠. 交替迭代多约束波束优化设计[J]. *声学学报*, 2021, 46(6): 896–904.  
Yan Shefeng, Wang Wenxia. Design of multiply constrained beamformer via alternating direction method of multipliers[J]. *Acta Acustica*, 2021, 46(6): 896–904.
- [11] Xue H, Chen H, Wang X. Design of robust polynomial beamformers using worst case performance optimization via alternating direction method of multipliers[J]. *IEEE Sensors Journal*, 2023, 23(7): 7690–7704.
- [12] Wang W, Yan S, Mao L. Time-domain frequency-invariant beampattern synthesis via alternating direction method of multipliers[J]. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 2020, 147(5): 3372–3375.
- [13] Liu Y, Zhang L, Ye L, et al. Synthesis of sparse arrays with frequency-invariant-focused beam patterns under accurate sidelobe control by iterative second-order cone programming[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2015, 63(12): 5826–5832.
- [14] Yang J, Lin J, Shi Q, et al. An ADMM-based approach to robust array pattern synthesis[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2019, 26(6): 898–902.
- [15] Horn R A, Johnson C R. *Matrix analysis*[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2012.
- [16] Oliveira D E, Wolkowicz H, Xu Y. ADMM for the SDP relaxation of the QAP[J]. *Mathematical Programming Computation*, 2018, 10(4): 631–658.
- [17] Bala J, Lakhwani K. Single image desmogging using oblique gradient profile prior and variational minimization[J]. *Multidimensional Systems and Signal Processing*, 2020, 31(4): 1259–1275.
- [18] Chen H, Ser W, Zhou J. Robust nearfield wideband beamformer design using worst case mean performance optimization with passband response variance constraint[J]. *IEEE Transactions on Audio, Speech, and Language Processing*, 2012, 20(5): 1565–1572.

## 附录 A

针对3.2节的步骤6, 根据式(53)对辅助变量  $\mathbf{v}^{(t+1)}$  进行求解。定义式(53)中的代价函数为  $F(\mathbf{v}) = \psi^{(t+1)}\|\mathbf{v}\|_2 + \frac{\rho}{2}\|\mathbf{v} - \mathbf{\Gamma}_v^{(t+1)}\|_2^2$ , 令  $F(\mathbf{v})$  对向量  $\mathbf{v}$  的一阶导数为  $\mathbf{0}$ , 即:

$$\frac{\partial F(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} = \psi^{(t+1)} \frac{\partial \|\mathbf{v}\|_2}{\partial \mathbf{v}} + \rho(\mathbf{v} - \mathbf{\Gamma}_v^{(t+1)}) = \mathbf{0}, \quad (\text{A1})$$

式(A1)中, 对  $\ell_2$  范数求一阶导数, 可得  $\frac{\partial \|\mathbf{v}\|_2}{\partial \mathbf{v}} = \begin{cases} \mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|_2, & \mathbf{v} \neq \mathbf{0}_U, \\ \{\mathbf{g} \mid \|\mathbf{g}\|_1 \leq 1\}, & \mathbf{v} = \mathbf{0}_U, \end{cases}$  其中  $\mathbf{0}_U \in \mathbf{R}^U$  为零列向量。

因此, 求解式(A1)可分为如下两种情况:

(1) 若  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}_U$ , 则式(A1)可以表示为

$$[1 + \psi^{(t+1)}/(\rho\|\mathbf{v}\|_2)]\mathbf{v} = \mathbf{\Gamma}_v^{(t+1)}. \quad (\text{A2})$$

$\exists \gamma > 0$ , 使得  $\mathbf{v} = \gamma \mathbf{\Gamma}_v^{(t+1)}$ , 代入式(A2)得到:

$$\hat{\gamma} = (\|\mathbf{\Gamma}_v^{(t+1)}\|_2 - \psi^{(t+1)}/\rho) / \|\mathbf{\Gamma}_v^{(t+1)}\|_2 > 0. \quad (\text{A3})$$

此时  $\mathbf{v} = \hat{\gamma} \mathbf{\Gamma}_v^{(t+1)}$ ,  $\|\mathbf{\Gamma}_v^{(t+1)}\|_2 > \psi^{(t+1)}/\rho$  且  $\|\mathbf{\Gamma}_v^{(t+1)}\|_2 \neq 0$ 。

(2) 若  $\mathbf{v} = \mathbf{0}_U$ , 则式(A1)可以表示为

$$(\psi^{(t+1)}/\rho)\mathbf{g} = \mathbf{\Gamma}_v^{(t+1)}, \quad \text{s.t. } \|\mathbf{g}\|_1 \leq 1. \quad (\text{A4})$$

此时  $\mathbf{v} = \mathbf{0}_U$ , 且  $\|\mathbf{\Gamma}_v^{(t+1)}\|_2 \leq \psi^{(t+1)}/\rho$ 。

根据上述推导, 可得  $\mathbf{v}^{(t+1)} = \begin{cases} \mathbf{\Gamma}_v^{(t+1)}[\hat{\gamma}]_+, & \|\mathbf{\Gamma}_v^{(t+1)}\|_2 \neq 0 \\ \mathbf{0}_U, & \|\mathbf{\Gamma}_v^{(t+1)}\|_2 = 0 \end{cases}$ 。